



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

28

29

T

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. PICQUET,	}	Secrétaires de la Société.
POLIGNAC (DE),		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME DIXIÈME. — ANNÉE 1881-82.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1882

QA
1
S59
t.10-11

12544
28/1/91

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1882 (¹).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	M. HALPHEN.
Vice-Présidents	{ M. ANDRÉ (Désiré). M. FOURET. M. LUCAS. M. PERRIN.
Secrétaires	{ M. PICQUET. M. POLIGNAC (DE).
Vice-Secrétaires.....	{ M. HUMBERT. M. WEILL.
Archiviste.....	M. STEPHANOS.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil.....	{ M. OSSIAN BONNET. M. CLAYEUX. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. FABRE. M. DE LA GOURNERIE. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. ROUCHÉ.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. AOUST (l'abbé). M. CREMONA. M. LEMONNIER. M. WEYR (Émile).

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- ACHARD**, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
- AMIGLES**, professeur de Mathématiques spéciales, au Lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
- ANDRÉ** (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
- ANTOINE** (Charles), ingénieur de la Marine, à Brest.
- Aoust** (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille.
- APPELL**, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
- ARON** (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
- ASSELIN**, élève externe à l'École des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
- ASTOR**, professeur de Mathématiques spéciales, au Lycée, rue Rancher, 2, à Nice.
- BENOIST** (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, à Chalon.
- BERDELLE**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
- BERTRAND** (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
- BISCHOFFSHEIM**, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- BIENAYMÉ** (Arthur), ingénieur de la Marine, à Toulon (Var).
- BIENAYMÉ**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- BONCOMPAGNI** (le prince Balthazar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
- BONNET** (Ossian), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 80, à Paris.
- BORCHARDT**, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- BOUCHER**, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
- BOULANGER**, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
- BRALT** (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
- BRÉGUET**, membre de l'Institut, quai de l'Horloge, 39, à Paris.
- BUEMARD**, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.
- BUHOT** (F.), capitaine d'infanterie de la Marine, à Cherbourg.
- BRISSE** (A.), ingénieur du dessèchement du lac Fucino, Abruzzes (Italie).
- BRISSE** (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 22, à Paris.
- BROCARD**, capitaine du Génie, à Alger, S. P.
- CARON**, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 52, à Paris.
- CATALAN**, professeur à l'Université, à Liège (Belgique).
- CHASLES**, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- CHEMIN**, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 89, à Paris.
- CIVILE**, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- CLAYEUX**, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 31, à Paris, S. P.
- COLLET**, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
- COLLIGNON**, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBEROUSSE** (DE), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
- COURCELLES**, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.
- CREMONA**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
- CRETIN**, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Seine, 63, à Paris.
- DARBOUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DEFFORGES**, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 123, à Paris.
- DÉSQ**, capitaine d'Artillerie, à Besançon.
- DÉWILF**, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Montpellier.
- DOSTOR**, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
- DERRANDE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
- ESCAIRY**, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
- FABRE**, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
- FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
- FLYE SAINT-MARIE**, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 11, à Paris.
- FONTÈS**, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Villefranche (Haute-Garonne).

- FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
- GABRIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Jouffroy, 39, à Paris-Batignolles.
- GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
- GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Orlans.
- GERONO, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
- GHOD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, rue de Vaugirard, 23, à Paris.
- GOFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
- GOURNERIE (DE LA), membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 75, à Paris.
- GOUSAT, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard d'Arcole, 16, à Toulouse.
- GRAINHARGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
- GRUEY, doyen de la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- GUCCIA (Jean), via Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
- GUÉLOT, chef de bataillon, commandant le 10^e bataillon de chasseurs à pied, à Saint-Dié (Vosges).
- GUNTHER (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
- HAG, répétiteur à l'École Polytechnique, avenue de Villars, 15, à Paris.
- HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
- HATON DE LA GOUPILLIÈRE, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
- HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
- HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
- HERMARY, chef d'escadrons au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
- HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
- HILAIRE, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
- HIRST, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
- HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, à Christiania (Norvège).
- HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
- HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
- HUMBERT, élève-ingénieur des Mines, rue Notre-Dame-des-Champs, 83, à Paris.
- HUYOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
- IMBER, répétiteur à l'École centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
- JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, cours Saint-Jean, 170, à Bordeaux.
- JANNY, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
- JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Le-moine, 28, à Paris.
- JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
- JOUFFRET, chef d'escadron d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
- JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan (Italie).
- KANTOR (S.), privat-docent à l'École polytechnique allemande, à Prague.
- KÖHLER, directeur de l'École préparatoire de Sainte-Barbe, rue de Reims, 6, à Paris.
- KÖNIGS, élève à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
- LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences, rue des Pyramides, 4, à Lille.
- LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé), S. P.
- LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
- LANSANT, député, rue de l'Aqueduc, 5, à Paris.
- LAQUIÈRE, administrateur de la commune mixte de la Mekerra, à Sidi-bel-Abbès (Algérie).
- LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LAVEISSIÈRE, élève externe à l'École des Mines, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- LEAUTÉ, directeur des études à l'École Monge, 145, boulevard Malesherbes, à Paris.
- LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 121, à Paris.
- LECORNE, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).

- LEFÈVRE, professeur au lycée, place Reggio, 7, à Bar-le-Duc.
- LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
- LEMONNIER, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Carrières Saint-Gilles, 11, à Caen.
- LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
- LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
- LEVY (Maurice), professeur à l'École Centrale, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
- LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
- LINDEMANN, professeur à l'Université, Mottkestrasse, 13, à Fribourg-en-Brisgau (Allemagne).
- LONGCHAMPS (GOMIERRE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue Gay-Lussac, 35, à Paris.
- LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186, à Paris.
- LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 2, à Paris.
- MALEYX, professeur au collège Stanislas, avenue de Montsouris, 2, à Paris.
- MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 11, à Paris.
- MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
- MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
- MARSILLY (le général DE), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
- MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
- MIGNON, chef d'escadron d'Artillerie, chef d'état-major de l'Artillerie du 19^e corps, à Vincennes.
- MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Helsingfors (Finlande).
- MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- OYDIO (Enrico D'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
- PARMENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
- PARRAY, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
- PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- PERCIN, capitaine d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
- PERRIN, ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 80, à Paris.
- PEROTT (Joseph), avenue d'Essling, 7, à Paris, S. P.
- PHILIPPOV, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
- PICARD (Émile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue Michelet, 13, à Paris.
- PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
- PISTOYE (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.
- POLIGNAC (prince C. DE), rue Miroménil, 44, à Paris, S. P.
- POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
- PRESLES (DE), sous-intendant militaire, à Évreux.
- PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
- PUISEUX, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 81, à Paris.
- PUTZ (le général), commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
- RADAI, rue de Tournon, 12, à Paris.
- RANCY (DE), directeur-général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
- REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 4, à Paris.
- REY (Casimir), professeur à l'École regimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
- RIBAUDOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
- RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
- RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
- ROLLAND, membre de l'Institut, au Ministère des Finances, à Paris.

ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, rue de la Ferme-des-Mathurins, 5, à Paris.
ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
SAINT-PAUL (Duc de), capitaine au 36^e régiment d'Artillerie, à Clermont-Ferrand.
SALTEL (Louis), maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 24, à Paris.
SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
SCHOUTE, professeur à Groningue (Hollande).
SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
SIVRING (Jos.), ingénieur en chef des travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
SONINE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
STARKOFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire, à Marseille.
STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Arbalète, 28, à Paris.
STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohême).
TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre, S. P.
TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 141, à Paris.
TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Pont-de-Claix (Isère).
TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
TRESKA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saumur (Maine-et-Loire).
TURQUAN, docteur ès sciences, rue Volney, 2, à Angers.
VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
VANECEK, professeur au lycée, à Jicin (Bohême).
VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, élève-ingénieur des Mines, boulevard Haussmann, 135, à Paris.
WEILL, professeur de Mathématiques, rue de Rome, 14, à Paris.
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohême).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Marokkanergasse, 1, à Vienne (Autriche).
WORMS DE ROMILLY, ingénieur des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZEUTHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

Modifications survenues depuis le 1^{er} janvier 1881.

DÉCÉDÉS.

BIENAYMÉ (Alexis), chef de bataillon du Génie.
SAINTÉ CLAIRE-DEVILLE, membre de l'Institut.

DÉMISSIONNAIRES.

BACH, doyen de la Faculté des Sciences, à Nancy.
BOUFFET, ingénieur des Ponts et Chaussées.

BOURGET, recteur de l'Académie d'Aix (art. 42 du règlement administratif).
BRIOSCHI, directeur de l'Ecole polytechnique de Milan (art. 42 du règlement administratif).
CABART (Maurice).
LEFÈBRE DE FOULCY.
MONTIGNY (DE), capitaine du Génie.
NICOLAÏDÈS, professeur à l'Université d'Athènes (art. 42 du règlement administratif).
SVILOKOSSITSCH, ingénieur (art. 42 du règlement administratif).
THÉRY, professeur au lycée de Douai.
WELSCH, capitaine d'Artillerie (art. 42 du règlement administratif).

NOUVEAUX MEMBRES.

AMIGUES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.
ASSELIN, élève externe à l'École des Mines.
ASTOR, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.
BOYCOMPAGNI (le prince Balthasar).
BRAULT, négociant.
BRÉGET, membre de l'Institut.
BRIOT (F.), capitaine d'Infanterie de la Marine.
CHEMIN, ingénieur des Ponts et Chaussées.
DEFFORGES, capitaine d'Infanterie.
ESCARY, professeur au Prytanée militaire.
FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy.
GÖRSAT, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.
GRUEY, doyen de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.
GUNTHER (Dr Sigismond), député au Reichstag allemand.
INBER, répétiteur à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures.
LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences de Lille.
LAVEISSIÈRE, élève externe à l'École des Mines.
LECORNI, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Caen.
LONGCHAMPS (GOUHIER DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.
MALMSTÉV, conseiller d'Etat, à Upsal.
PELLET, professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.
PEROTT (Joseph), S. P.
PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université d'Oxford.
RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.
SAINT-PAUL (DUPRE DE), capitaine d'Artillerie.
SCHLEGEL (Dr Victor), professeur à Waren.
SCHOLTE, professeur à Groningue.
SOWINE (N.), professeur à l'Université de Varsovie.
STARCKOFF (Alexis), professeur à l'Ecole de commerce d'Odessa.
ZELTHEX, professeur à l'Université de Copenhague.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.

- Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lineei*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
American Journal of Mathematics (rédacteur M. Sylvester, à Baltimore).
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Casopy pro pěstování matematiky a fysiky (rédacteur M. Studnicka, à Prague).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Naples).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres de Milan.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion et Neubourg, à Gand).
Rénnon des officiers, à Lille.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société Royale d'Édimbourg.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal.
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Université Royale de Pise.
Tidskrift for Mathematik (rédacteur M. Zeuthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Wiskunde en de beginselen der Rekening (rédacteur M. Versluys, à Groningue).
-

STATUTS DE LA SOCIÉTÉ.

ARTICLE PREMIER. — La Société mathématique de France a pour objet l'avancement et la propagation des études mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres. Son siège est à Paris.

ART. 2. — Aucune communication ou discussion ne peut avoir lieu sur des objets étrangers aux Mathématiques.

ART. 3. — La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les Étrangers peuvent également en faire partie.

ART. 4. — Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° obtenir à l'une des séances suivantes les suffrages de la majorité des membres présents.

ART. 5. — Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

ART. 6. — L'administration de la Société est confiée à un conseil composé :

1° Des membres du bureau;

2° De douze autres membres résidents de la Société désignés par l'élection;

3° De quatre membres non résidents désignés par l'élection; ils auront voix délibérative dans le conseil lors de leur présence à Paris.

ART. 7. — Le conseil est présidé par le président de la Société.

ART. 8. — Le bureau est composé de :

- 1 président;
- 4 vice-présidents;
- 2 secrétaires;
- 2 vice-secrétaires;
- 1 trésorier;
- 1 archiviste.

ART. 9. — Le président est élu pour un an.

Les vice-présidents sont nommés pour deux ans.

Deux d'entre eux sont remplacés chaque année.

Les secrétaires et les vice-secrétaires sont élus pour deux ans.

Le trésorier et l'archiviste pour trois ans.

ART. 10. — Le président n'est pas rééligible immédiatement dans les mêmes fonctions.

ART. 11. — Parmi les douze membres du conseil qui résident à Paris et qui ne font pas partie du bureau, quatre sont remplacés chaque année à tour de rôle.

ART. 12. — Tous les membres de la Société sont appelés à participer à l'élection du président, soit directement, soit par correspondance.

ART. 13. — Les autres membres du bureau et les membres du conseil sont élus à la majorité absolue des membres présents.

ART. 14. — Les ressources de la Société se composent : 1° de la cotisation annuelle des membres résidents et non résidents, et dont le montant est fixé par le règlement administratif de la Société ; 2° du revenu du capital formé par les droits d'admission, les souscriptions perpétuelles, le produit de la vente des ouvrages édités par la Société et les dons qu'elle pourra recevoir.

ART. 15. — La Société règle annuellement le budget de ses dépenses.

Dans la première séance de chaque année, le compte détaillé des recettes et dépenses de l'année révolue sera soumis à l'approbation de la Société ; ce compte rendu sera publié dans le *Bulletin*.

RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

CHAPITRE PREMIER.

CONDITIONS D'ADMISSION.

1. Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée ;

2° D'obtenir, à l'une des séances suivantes, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des statuts).

2. Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

CHAPITRE II.

TRAVAUX ET PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ.

Tenue des séances.

3. La Société tient ses séances ordinaires deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

4. La première séance de janvier est consacrée spécialement aux élections pour le remplacement des membres sortants du bureau et du conseil.

5. Le tableau des jours de réunion est imprimé sur une carte adressée aux membres résidant à Paris.

Elle sera également envoyée aux membres non résidents sur leur demande personnelle.

Les membres sont convoqués à domicile pour les séances extraordinaires.

6. Pour assister à la séance, les personnes étrangères à la Société doivent être introduites, chaque fois, par un de ses membres.

7. La présence du président ou d'un vice-président, assisté d'un des secrétaires ou vice-secrétaires, suffit pour constituer le bureau à chaque séance.

8. En cas d'absence du président ou des vice-présidents, le trésorier, ou à son défaut l'archiviste, occupe le fauteuil.

En cas d'absence de tous les membres du bureau, les fonctions du président sont remplies par le plus âgé des membres du conseil présents à la séance.

En cas d'absence des secrétaires et vice-secrétaires, le président du jour désigne un des membres du conseil pour en remplir les fonctions.

9. Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Chaque séance commence par la lecture du procès-verbal de la séance précédente et de l'ordre du jour.

10. Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étran-

gères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

11. Dans les séances ordinaires, on ne peut traiter aucune question relative à l'administration, à moins d'une demande du conseil.

12. Toutes les observations relatives à l'administration sont adressées par écrit au président, qui en réfère au conseil, à sa plus prochaine réunion.

Bulletin.

13. La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé : *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

14. Les conventions stipulées entre le conseil de la Société et les éditeurs chargés de la publication du *Bulletin* devront être soumises à l'approbation de la Société.

Réimpression des ouvrages anciens et publication des mémoires originaux.

15. La Société, voulant concourir aux progrès des Mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin*.

16. Les publications émanant de la Société, autres que le *Bulletin*, sont délivrées à prix réduit à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

CHAPITRE III.

ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ.

17. Chaque élection a lieu au scrutin secret, sur un seul bulletin, et, s'il est nécessaire, au moyen de deux tours, dont le second est de ballottage. Dans le cas d'égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

18. L'élection du président seule donne lieu au vote de tous les membres résidents ou non résidents. Tout membre qui ne peut assister à la réunion

électorale est invité à envoyer au secrétaire, avant la première séance de janvier, son suffrage individuel dans un bulletin cacheté et enfermé dans une lettre signée de lui.

Ce bulletin ne peut être ouvert qu'au moment du dépouillement du scrutin.

19. Les secrétaires ou, à leur défaut, les vice-secrétaires rédigent les procès-verbaux des séances de la Société et des séances du conseil.

20. Une commission d'impression, composée des secrétaires et de quatre membres nommés par le conseil, dirige la publication du *Bulletin* et l'impression des mémoires et communications.

21. Sous la direction du président, les secrétaires sont chargés de la correspondance pour ce qui concerne les travaux et les affaires de la Société autres que les affaires de finances : ils convoquent la Société, le conseil et les commissions quand il y a lieu, et préparent les ordres du jour.

22. La Société forme une bibliothèque et échange ses publications contre les journaux et les recueils consacrés aux Mathématiques pures et appliquées, publiés en France et à l'étranger.

23. L'archiviste est chargé de la garde des archives de la Société; il en dresse un inventaire.

Il a sous sa direction la bibliothèque; il dresse le catalogue des livres et brochures imprimés, et tient un registre des manuscrits envoyés.

Enfin, il a sous sa garde tous les documents appartenant à la Société.

24. Le trésorier est chargé du recouvrement des sommes dues à la Société.

25. Il tient un registre des recettes et des dépenses, que tous les membres ont le droit de consulter.

26. Le trésorier ne peut faire aucun emploi extraordinaire des fonds de la Société sans une délibération spéciale du conseil.

Conseil et commissions.

27. Le président convoque le conseil toutes les fois que les affaires de la Société le réclament.

28. Il suffit d'une demande motivée, signée par cinq membres du conseil et adressée au président, pour qu'une convocation du conseil soit obligatoire.

29. A chaque séance du conseil, les noms des membres présents sont consignés au procès-verbal.

30. Il faut au moins sept membres présents pour prendre des décisions en conseil.

31. Sur la proposition de cinq membres, le vote peut avoir lieu au scrutin secret.

32. Sur la demande de cinq membres, il peut être fait appel à la Société des décisions qui n'auraient pas été prises aux deux tiers des voix au sein du conseil.

33. Les procès-verbaux des séances du conseil doivent être transcrits sur un registre coté et parafé par le secrétaire; il doivent être signés par le président et le secrétaire qui a tenu la plume; les renvois doivent être parafés et les mots rayés approuvés.

34. Le conseil se réunit dans la dernière quinzaine de décembre pour examiner l'état des affaires de la Société, nommer la commission de comptabilité chargée de vérifier la gestion du trésorier, et la commission des archives chargée de vérifier celle de l'archiviste.

35. Ces deux commissions ne peuvent être composées de moins de trois membres; elles font leur rapport dans la première séance de janvier.

36. Le conseil désigne annuellement, à la même époque, les membres qui, adjoints aux deux secrétaires, composent la commission permanente d'impression pour la publication du *Bulletin* et l'insertion des notes et mémoires des membres de la Société.

Cette commission veille à ce qu'il ne s'introduise dans les publications rien d'étranger à la Science.

37. Les membres élus de la commission d'impression sont nommés pour trois ans.

Les membres de la commission d'impression peuvent être pris indistinctement dans la Société ou dans le conseil.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS, REVENUS ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ.

38. Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

39. Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 20 francs, payables d'avance, et, pour les membres non résidents, à 15 francs, également payables d'avance.

Sont considérés comme résidents les membres qui ont à Paris leurs occupations habituelles, ou y exercent habituellement leurs fonctions.

40. Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation, quelle que soit l'époque de leur admission.

41. Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

42. Tout membre qui n'aura pas acquitté la cotisation d'une année sera, après avertissement préalable du trésorier, considéré comme démissionnaire.

43. La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel*.

44. Les dons faits à la Société sont inscrits au *Bulletin des séances* avec le nom des donateurs.

45. Les dépenses sont divisées en ordinaires et extraordinaires.

Les dépenses ordinaires se composent de frais de bureau et d'imprimés, ports de lettres, frais d'entretien, loyer du local, appointements des employés et frais d'impression du *Bulletin*. Le chiffre des dépenses ordinaires ne peut excéder les $\frac{9}{10}$ des ressources annuelles.

Les dépenses extraordinaires sont votées par la Société sur la proposition du conseil.

46. La Société ne s'engage jamais dans aucune dépense excédant son avoir.

CHAPITRE V.

REVISION DES STATUTS CONSTITUTIFS OU DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.

47. Toute proposition de revision des statuts constitutifs ou du règlement administratif ne pourra être prise en considération que si elle est signée collectivement par vingt membres.

48. Le président fera, dans ce cas, procéder à un scrutin pour la nomination d'une commission de revision, qui sera composée de quatre membres du conseil et de trois membres pris en dehors.

49. La discussion du projet exigera la présence de la moitié plus un des membres résidant à Paris.

Tous les membres sont convoqués par lettres spéciales.

50. Si le nombre ci-dessus n'est pas atteint, la discussion aura lieu dans la séance suivante, quel que soit le nombre des membres présents.



AVIS.

La Rédaction a l'honneur de prévenir MM. les Auteurs que le Conseil de la Société mathématique, dans sa séance du 16 décembre 1881, a pris les décisions suivantes :

1° *La Société prendra à sa charge la moitié de la dépense des tirages à part d'auteur, pour cinquante exemplaires et au-dessous.*

2° *Pour plus de cinquante exemplaires, la Société payera la moitié du prix de cinquante exemplaires, au tarif fixé pour le tirage à cinquante exemplaires.*

Il résulte de là que les auteurs auront à déboursier les sommes suivantes :

NOMBRE DES EXEMPLAIRES.	25.	50.	100.	200.	300.	400.	500.	1000.
Pour $\frac{1}{4}$ feuille	3,65	4,25	6,75	13,25	19,75	26,25	32,75	65,25
» $\frac{1}{2}$ »	4,15	5,00	8,50	16,00	23,50	31,00	38,50	76,00
» $\frac{3}{4}$ »	6,15	7,25	11,25	20,75	30,25	39,75	49,25	96,75
» 1 »	6,90	8,25	12,75	23,75	34,75	45,75	56,75	111,75

dont ils seront facturés directement par l'imprimerie Gauthier-Villars.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre; par M. LINDEMANN.

(Séance du 6 janvier 1882.)

Le problème dont nous allons nous occuper demande d'effectuer l'élimination des paramètres α, λ, μ , des variables homogènes x_1, x_2, x_3 , des différentielles dx_1, dx_2, dx_3 , des différentielles du second ordre d^2x_1, d^2x_2, d^2x_3 et des différentielles du troisième ordre d^3x_1, d^3x_2, d^3x_3 , entre les équations suivantes, dans lesquelles $\varphi, \psi, \chi, \omega$ désignent des fonctions entières et homogènes d'un même ordre et f une telle fonction d'un ordre égal ou différent, savoir :

$$\begin{aligned}\varphi + \alpha\psi + \lambda\chi + \mu\omega &= 0, \\ d\varphi + \alpha d\psi + \lambda d\chi + \mu d\omega &= 0, \\ d^2\varphi + \alpha d^2\psi + \lambda d^2\chi + \mu d^2\omega &= 0, \\ d^3\varphi + \alpha d^3\psi + \lambda d^3\chi + \mu d^3\omega &= 0, \\ f = 0, \quad df = 0, \quad d^2f = 0, \quad d^3f = 0.\end{aligned}$$

Pour y arriver, nous avons dû traiter d'abord, dans I et II, les cas où il ne s'agit que des différentielles du premier ou du deuxième ordre, cas pour lesquels les résultats sont déjà connus, mais nous les présenterons sous une forme nouvelle. III est consacré au pro-

blème proposé. La marche que nous allons suivre offre cet avantage qu'elle peut s'appliquer d'une façon analogue aux cas plus compliqués; on peut, en effet, résoudre par des calculs semblables le problème relatif à un contact d'ordre γ , après avoir abordé celui qui concerne un contact d'ordre $\gamma - 1$. Le dernier paragraphe est consacré à quelques observations auxquelles donnent lieu les résultats obtenus combinés avec la loi de réciprocité de M. Brill.

M. Krey ⁽¹⁾ s'est aussi occupé du problème actuel; il a effectué l'élimination des différentielles et des paramètres; mais il n'est pas parvenu à séparer du résultat le facteur

$$k_x^3 = (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3)^3,$$

k_1, k_2, k_3 étant des constantes qui servent à fixer, par l'identité $k_x = 1$, les valeurs absolues des coordonnées x_1, x_2, x_3 .

1. — *Contact du premier ordre.*

1. Désignons par n l'ordre de la courbe primitive, et supposons qu'elle soit représentée, en coordonnées homogènes, par l'équation

$$f = 0 \quad \text{ou} \quad f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Les dérivées de f par rapport à x_1, x_2, x_3 , multipliées par n , seront désignées par f_1, f_2, f_3 , de sorte que

$$f_1 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f_3 = \frac{1}{n} \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Notre premier problème est de déterminer les courbes d'un faisceau

$$(1) \quad \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) = 0$$

qui touchent la courbe primitive. A cet effet, il suffit de déterminer sur $f = 0$ les points de contact des courbes demandées; ces points sont les points de coïncidence d'une certaine correspondance qui est donnée par notre problème entre les points x et y de $f = 0$. Par chaque point y de cette dernière passe une courbe du fais-

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. X, p. 221; 1876.

ceau, donnée par l'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $y_i = x_i$, cette équation est satisfaite identiquement; nous cherchons de tels points x sur $f = 0$, pour lesquels elle est encore satisfaite si l'on pose $y_i = x_i + dx_i$ ou

$$(2) \quad f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0.$$

Par cette substitution, elle devient

$$\begin{vmatrix} \sum \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i} dx_i & \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités dx_i sont déterminées par (2) et par une identité de la forme

$$(3) \quad k_1 dx_1 + k_2 dx_2 + k_3 dx_3 = 0,$$

les k_i étant des constantes telles que

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 1.$$

On tire de (2) et (3)

$$(3a) \quad \begin{cases} \rho dx_1 = f_2 k_3 - k_2 f_3, \\ \rho dx_2 = f_3 k_1 - k_3 f_1, \\ \rho dx_3 = f_1 k_2 - k_1 f_2. \end{cases}$$

Par l'introduction de ces valeurs dans notre déterminant, et en désignant par $(\varphi \psi \chi)$ le déterminant des fonctions φ, ψ, χ , on trouve

$$(4) \quad \begin{vmatrix} (\varphi_0 f k) & (\varphi_1 f k) \\ \varphi_0(x) & \varphi_1(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit de séparer du premier membre le facteur

$$k_x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3,$$

par lequel il doit être divisible. C'est en se servant de la notation symbolique que l'on peut effectuer cette séparation de la manière la plus facile. Faisons donc, s étant l'ordre des courbes du fais-

ceau,

$$\varphi_0(x) = \alpha_x^s, \quad \varphi_1(x) = \beta_x^s, \quad f(x) = \alpha_x^n.$$

d'où

$$(\varphi_0 f k) = ns.(\alpha k) \alpha_x^{s-1} \alpha_x^{n-1},$$

$$(\varphi_1 f k) = ns.(\beta k) \beta_x^{s-1} \alpha_x^{n-1}.$$

L'équation (4) devient

$$[(\alpha k) \beta_x - (\beta k) \alpha_x] \alpha_x^{n-1} \beta_x^{s-1} = 0.$$

Relativement à l'expression entre crochets, nous opérons par l'identité

$$(\alpha k) \beta_x - (\beta k) \alpha_x = (\alpha \beta k) \alpha_x - (\alpha \beta a) k_x.$$

Eu égard aux conditions $\alpha_x^n = 0$, $k_x = 1$, il vient

$$(5) \quad (\alpha \alpha \beta) \alpha_x^{n-1} \beta_x^{s-1} = 0,$$

d'où il suit que *les points de contact cherchés sont les intersections de $f = 0$ avec la jacobienne des trois courbes $f = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$; résultat qui est d'ailleurs connu* ⁽¹⁾.

II. — Contact du deuxième ordre.

3. Nous supposons donné un système linéaire dépendant de deux paramètres, savoir

$$(6) \quad \varphi + \lambda \psi + \mu \chi = 0,$$

où

$$\varphi = \alpha_x^s, \quad \psi = \beta_x^s, \quad \chi = \gamma_x^s.$$

Dans notre édition des leçons de Clebsch ⁽²⁾, nous avons fait remarquer que l'équation de la courbe d'ordre s , qui appartient au système (6) et qui touche la courbe $f = 0$ en un point x , est donnée par l'équation

$$(f \psi \chi) \cdot \varphi(x) + (f \chi \varphi) \cdot \psi(x) + (f \varphi \psi) \cdot \chi(x) = 0,$$

le point variable ayant les coordonnées x_i ; ou bien, en appliquant

⁽¹⁾ Voir CLEBSCH, *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, p. 460, note; t. II, p. 171 dans la traduction de M. Benoist.

⁽²⁾ *Ibid.*, t. I, p. 460; t. II, p. 165 dans la traduction de M. Benoist.

la notation symbolique,

$$[(a\beta\gamma)\beta_x^{s-1}.\gamma_x^{s-1}.\alpha_y^s + (a\gamma\alpha)\gamma_x^{s-1}.\alpha_x^{s-1}.\beta_y^s + (a\alpha\beta)\alpha_x^{s-1}.\beta_x^{s-1}.\gamma_y^s]a_x^{s-1} = 0$$

Cette même formule peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(7) \quad \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \gamma(y) & 0 \\ \varphi_1(x) & \psi_1(x) & \gamma_1(x) & f_1(x) \\ \varphi_2(x) & \psi_2(x) & \gamma_2(x) & f_2(x) \\ \varphi_3(x) & \psi_3(x) & \gamma_3(x) & f_3(x) \end{vmatrix} = 0,$$

où nous avons posé

$$\varphi_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad \psi_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad \gamma_i(x) = \frac{1}{s} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation (7) satisfait, en effet, aux conditions demandées. D'abord le premier membre s'évanouit identiquement pour $y = x$, car on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\varphi_1 + x_2\varphi_2 + x_3\varphi_3 \\ \psi(x) &= x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3 \\ \gamma(x) &= x_1\gamma_1 + x_2\gamma_2 + x_3\gamma_3 \\ f(x) &= x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 = 0 \end{aligned}$$

De même, pour $y = x + dx$, l'équation (7) est satisfaite identiquement. Car si l'on en multiplie les trois dernières lignes du déterminant respectivement par x_1, x_2, x_3 et si l'on retranche la somme de ces produits de la première ligne, les termes de cette dernière deviennent, en vertu de $f = 0$,

$$d\varphi(x), \quad d\psi(x), \quad d\gamma(x), \quad 0.$$

Si l'on multiplie ensuite les même lignes par dx_1, dx_2, dx_3 et si l'on retranche encore la somme de ces produits des termes de la première ligne divisés par s , ces derniers disparaissent tous en vertu de $f = 0$. La courbe représentée par (7) a donc bien un contact du premier ordre avec $f = 0$ au point x , et elle fait partie du système (6).

4. Pour trouver maintenant les points où une courbe de ce système touche la courbe $f = 0$ par un contact de deuxième ordre, nous mettons, dans l'équation (7), les quantités

$$x_i + 2dx_i + d^2x_i$$

à la place des y_i . Les équations $f = 0$, $df = 0$, $d^2f = 0$ devant être satisfaites, les termes de la première ligne horizontale du déterminant se transforment aisément en

$$(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2, \quad (s-1)\beta_x^{s-2}\beta_{dx}^2, \quad (s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2, \quad (n-1)\alpha_x^{n-2}\alpha_{dx}^2,$$

les symboles c_i étant équivalents aux symboles a_i et b_i de $f(x)$. Dans ces expressions, il faut introduire les quantités k_i à l'aide de (3); on trouve, d'après une identité connue,

$$(7^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi^2 \alpha_{dx}^2 &= (\alpha f k)^2 = (\alpha a k)(a b k) \alpha_x^{n-1} b_x^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} (\alpha a k)^2 \alpha_x^{n-2} b_x^n + \frac{1}{2} (\alpha b k)^2 b_x^{n-2} \alpha_x^n \\ &\quad - \frac{1}{2} (a b k)^2 \alpha_x^2 \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} - \frac{1}{2} (a b \alpha)^2 \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} \cdot k_x^2 \\ &\quad + (a b \alpha)(a b k) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} \alpha_x k_x. \end{aligned} \right.$$

Si l'on forme trois relations analogues en remplaçant les symboles α par β , γ , c , et si l'on transforme par elles la première ligne du déterminant, dans chaque élément de cette ligne figurent cinq termes. Les deux premiers en disparaissent à cause de $f = 0$. On peut aussi faire disparaître le troisième terme qui contient les facteurs $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x)$ respectivement, en multipliant les trois dernières lignes du déterminant par des facteurs convenables et en ajoutant ces produits aux éléments de la première ligne.

Il ne reste donc, dans chaque élément de la première ligne, que le quatrième et le cinquième terme. Pour la quatrième colonne en particulier, ce cinquième terme est égal à

$$\begin{aligned} &(n-1)(a b c)(a b k) \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} k_x \\ &= \frac{n-1}{3} k_x [(a b k) c_x - (a c k) b_x - (c b k) a_x] (a b c) \alpha_x^{n-1} b_x^{n-2} c_x^{n-2} \\ &= \frac{n-1}{3} k_x^2 (a b c)^2 \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a, en vertu de $f = 0$, $df = 0$

$$(7^b) \quad \varphi^2, c_x^{n-2} c_{dx}^2 = -\frac{1}{6} k_x^2 (a b c)^2 \alpha_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2} = -\frac{1}{6} \Delta,$$

en désignant par Δ le covariant hessien de $f(x)$.

Multiplions maintenant les trois dernières lignes du déterminant

respectivement par

$$(s-1)(ab)_1(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x,$$

$$(s-1)(ab)_2(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x.$$

$$(s-1)(ab)_3(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}.k_x.$$

où $(ab)_1 = a_2b_3 - b_2a_3, \dots$, et retranchons les produits ainsi formés des termes de la première ligne; ceux-ci deviennent alors respectivement égaux à

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\alpha)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \alpha_x^{s-2}.k_x^2.$$

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\beta)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \beta_x^{s-2}.k_x^2.$$

$$-\frac{1}{2}(s-1)(ab\gamma)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \gamma_x^{s-2}.k_x^2.$$

$$-\frac{1}{6}(n-1)\Delta k_x^2 - (s-1)(abc)(abk)a_x^{n-2}b_x^{n-2}c_x^{n-1}k_x = -\frac{n+2s-3}{6}\Delta k_x^2.$$

Par ce calcul, nous avons donc séparé du déterminant un facteur k_x^2 , et les grandeurs k_i ne figurent plus dans le déterminant restant, de sorte que nous pouvons énoncer ce théorème :

Les points de la courbe $f=0$ où une courbe du réseau (6) a un contact du second ordre avec elle sont donnés par ses intersections avec une courbe d'ordre $3(n+s-3)$, savoir :

$$(8) \quad \begin{vmatrix} (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\chi & \frac{n+2s-2}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \gamma_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \gamma_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \gamma_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$(8a) \quad \begin{cases} \Phi = (ab\alpha)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \alpha_x^{s-2}, & \Psi = (ab\beta)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \beta_x^{s-2}, \\ \chi = (ab\gamma)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \gamma_x^{s-2}, & \Delta = (abc)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-2}. \end{cases}$$

§. Pour nous convaincre que notre résultat concorde bien avec celui de M. Brill ⁽¹⁾, nous allons le démontrer encore d'une autre manière.

Évidemment les points cherchés de $f=0$ doivent satisfaire à

⁽¹⁾ Ueber diejenigen Curven eines Buschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren (Mathematische Annalen, t. III, 1871).

l'équation

$$(9) \quad 0 = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \Sigma \varphi_i \cdot dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i + (s-1) \Sigma \Sigma \varphi_{ik} dx_i dx_k \end{vmatrix},$$

où nous n'avons écrit que les éléments de la première colonne, les autres colonnes étant de la même forme, et le déterminant devant être du troisième ordre. C'est par des transformations identiques de ce déterminant à l'aide des équations $f=0$, $df=0$, $d^2f=0$, que M. Brill a déterminé les intersections de la courbe (8) avec $f=0$ par l'équation

$$0 = \frac{s-1}{2} P - (n-1)Q,$$

où

$$P = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_3 & f_2 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_2 & f_1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \Delta.$$

Nous aurons démontré l'identité des deux résultats, lorsque nous serons parvenus à déduire l'équation (8) immédiatement de (9). Or on a, par des transformations élémentaires,

$$\begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ d\varphi & d\psi & d\chi \\ d^2\varphi & d^2\psi & d^2\chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi & \chi & 0 & 0 & 0 \\ d\varphi & d\psi & d\chi & 0 & 0 & 0 \\ d^2\varphi & d^2\psi & d^2\chi & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' & d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & 0 & -1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\varphi_{ik}dx_i dx_k, \\ \psi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\psi_{ik}dx_i dx_k, \quad \chi'' = (s-1)\Sigma\Sigma\chi_{ik}dx_i dx_k;$$

et, en poursuivant les transformations

$$= \frac{1}{f_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dx_2 & dx_3 \\ \varphi'' & \psi'' & \chi'' & \Sigma f_i d^2 x_i & d^2 x_2 & d^2 x_3 \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & -f_1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & -f_2 & -1 & 0 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & -f_3 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

enfin, le déterminant $x_2 dx_3 - x_3 dx_2$ étant proportionnel à f_1 (égal à σf_1),

$$= \sigma \begin{vmatrix} \varphi'' & \psi'' & \chi'' & (n-1)\Sigma\Sigma f_{ik}dx_i dx_k \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Par là, nous sommes en effet retombés sur l'équation (8), pourvu que l'on y ait fait la substitution

$$y_i = x_i + 2dx_i + d^2x_i.$$

III. — *Contact du troisième ordre.*

6. En partant des résultats obtenus précédemment, il est aisé d'établir l'équation d'une courbe d'ordre s qui fait partie d'un système trois fois infini, savoir :

$$\varphi(x) + \kappa\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

et qui touche la courbe $f(x) = 0$ en un point donné x , par un contact d'ordre 2. Cette équation est donnée, en variables y_i , par

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\Xi & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les quantités Φ, Ψ, X, Δ sont encore définies par (8^a), et nous avons posé

$$\Omega = (\partial ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} \partial_x^{s-2}, \quad \omega(x) = \partial_x^s.$$

Évidemment l'équation (10) est satisfaite pour $y = x$ et pour $y = x + dx$. Pour prouver qu'il en est de même pour

$$y = x + 2dx + d^2x,$$

il suffit de remarquer que, d'après les calculs achevés au n° 4, les termes de la deuxième ligne horizontale du déterminant peuvent être remplacés par

$$\begin{aligned} & (s-1)x_x^{s-2}x_{dx}^2, \quad (s-1)\partial_x^{s-2}\partial_{dx}^2, \\ & (s-1)\gamma_x^{s-2}\gamma_{dx}^2, \quad (s-1)\partial_x^{s-2}\partial_{dx}^2, \quad (n-1)a_x^{n-2}a_{dx}^2. \end{aligned}$$

7. Pour trouver maintenant les points de $f=0$ où une courbe du système proposé a avec $f=0$ un contact du troisième ordre, il nous faut mettre $x + 3dx + 3d^2x + d^3x$ à la place de y , ou bien $d^3z, \dots$ à la place de $z(y), \dots$. La relation $d^3f=0$ ou

$$(11) \quad a_x^{n-1}a_{d^3x} + 3(n-1)a_x^{2-n}a_{dx}a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-3}a_{dx}^3 = 0$$

devant être satisfaite, les cinq termes de la première ligne du déterminant (10) peuvent s'écrire

$$(12) \quad \begin{cases} 3(s-1)x_x^{s-2}x_{dx}x_{d^2x} + (s-1)(s-2)x_x^{s-3}x_{dx}^3, \dots \\ 3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + (n-1)(n-2)a_x^{n-2}a_{dx}^3. \end{cases}$$

De la relation (7^a), on tire, par différentiation, en multipliant d'abord par x_x^{s-2} ,

$$\begin{aligned} & 2\partial^2 x_x^{s-2} x_{dx} x_{d^2x} + \partial^2 (s-2) x_x^{s-3} x_{dx}^3 + 2\partial d\partial x_x^{s-2} x_{d^2x}^2 \\ & = -\frac{s}{2} (abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} x_x^{s-1} x_{dx} \\ & \quad - (n-2) (abk)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-3} b_{dx} x_{dx}^s \\ & \quad - (n-2) (abx)^2 a_x^{n-3} b_x^{n-2} a_{dx} x_x^s k_x^2 \\ & \quad - \frac{(s-2)}{2} (abx)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2} x_x^{s-3} x_{dx} k_x^2 \\ & \quad + (abx) (abk) a_x^{n-3} b_x^{n-2} x_x^{s-2} [2(n-2) x_r a_{dx} \\ & \quad \quad \quad - (s-1) a_{dx} x_{dx} k_x]. \end{aligned} \quad (13)$$

Sur le quatrième et sur le dernier terme du second membre.

nous opérons par l'identité

$$(14) \quad \rho x_{dx} a_x = (xck) a_x = [(xca)k_x + (xak)c_x + (ack)x_x] c_x^{n-1}.$$

Il vient alors, en vertu de $f = c_x^n = 0$,

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\rho^3 x_x^{s-2} x_{dx} x_{d^2x} + \rho^3 (s-2) x_x^{s-3} x_{dx}^3 + 2\rho^2 d\rho x_x^{s-2} x_{dx}^2 \\ &= \frac{s-2}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{2n+s-6}{2} k_x^2 \Phi'' \\ &+ (2n+s-5) k_x \Phi''' + (s-1) \Phi^{iv} k_x^2 + A\varphi + B d\varphi, \end{aligned} \right.$$

en désignant par A, B des quantités qui ne contiennent plus les symboles x , et en posant

$$(15^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi' &= (abx)^2 (acx) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} x_x^{s-3}, \\ \Phi'' &= (abx)^2 (ack) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} x_x^{s-2}, \\ \Phi''' &= (abx) (abk) (ack) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} x_x^{s-1} = \Sigma R_i \varphi_i, \end{aligned} \right.$$

où

$$R_i = (ab)_i (abk) (ack) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1},$$

enfin

$$\begin{aligned} \Phi^{iv} &= (abx) (abk) (xca) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} x_x^{s-2} \\ &= (abx) [(abx) (kca) + (abc) (xka)] c_x \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc) [(abx) c_x - (acx) b_x] (xka) \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc) [(abc) x_x + (cbx) a_x] (xka) \Pi \\ &= -\Phi'' + \frac{1}{2} (abc)^2 (axk) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-2} x_x^{s-1}, \end{aligned}$$

car dans le troisième terme, qui devrait figurer au second membre, les facteurs $(cbx)(xka)$ peuvent être remplacés par

$$\frac{1}{3} [(cbx)(xka) - (abx)(xkc) - (cax)(xkb)] = \frac{1}{3} (cbx)(xka) = 0.$$

Ainsi le second membre de (15) devient

$$(15^b) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{s-2}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{2n+3s-8}{2} k_x^2 \Phi'' \\ &+ (2n+s-5) k_x \Phi''' + \frac{s-1}{2} k_x^2 \Phi^{iv} + B\varphi + B d\varphi, \end{aligned} \right.$$

où

$$(15^c) \quad \Phi^{iv} = (abc)^2 (axk) a_x^{n-3} b_x^{n-2} c_x^{n-1} x_x^{s-1} = \Sigma S_i \varphi_i$$

8. Pour achever l'élimination des différentielles, il nous faut encore étudier l'expression $\alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3$.

Les équations (3^a) et (7^a) donnent

$$\begin{aligned} \rho^3 \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3 &= (\alpha a k)(\alpha b k)(\alpha c k) a_x^{n-1} b_x^{n-1} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-3} \\ &= -\frac{1}{2} k_x^2 (ab\alpha)(\alpha c k) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-3} \\ &\quad + k_x (ab\alpha)(abk)(\alpha c k) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} \alpha_x^{s-2} \\ &\quad + A' \varphi + B' d\varphi, \end{aligned}$$

et, en appliquant, pour les deux premiers termes, encore l'identité (14)

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho^3 \alpha_x^{s-3} \alpha_{dx}^3 &= \frac{1}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{1}{2} k_x^2 \Phi'' + k_x^2 \Phi^{iv} + k_x \Phi''' + A' \varphi + B' d\varphi \\ &= \frac{1}{2} k_x^3 \Phi' - \frac{3}{2} k_x^2 \Phi'' + \frac{1}{2} k_x^2 \Phi^{iv} + k_x \Phi''' + A' \varphi + B' d\varphi. \end{aligned} \right.$$

Multiplions maintenant l'équation (15) par $\frac{3}{2}(s-1)$, et retranchons-en l'équation (16), multipliée par $\frac{1}{2}(s-1)(s-2)$, en ayant égard à l'expression (15^b) pour le second membre de (15). Ainsi nous trouvons la première des quantités (12) sous la forme suivante

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &3\rho^3(s-1)\alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}\alpha_{d^2x} + \rho^3(s-1)(s-2)\alpha_x^{s-3}\alpha_{dx}^3 \\ &= -3(s-1)\rho^2 d\varphi \alpha_x^{s-2}\alpha_{dx}^2 + A''\varphi + B''d\varphi + \frac{(s-1)(s-2)}{2}\Phi'k_x^3 \\ &\quad - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi''k_x^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Phi'''k_x + \frac{1}{4}(s-1)(2s-1)\Phi^{iv}k_x^2. \end{aligned} \right.$$

D'une manière analogue, on est conduit à trois autres relations qui résultent de (17), quand on y remplace le symbole α respectivement par β , γ , δ . Enfin, on peut mettre un symbole d (où $d_x^n = a_x^n$) à la place de α , pourvu que l'on mette simultanément n à la place de s . Dans ce cas, se présentent au lieu de Φ' , Φ'' , Φ''' , Φ^{iv} les formes

$$\begin{aligned} \Delta' &= (abd)^2(acd)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-3}, \\ \Delta'' &= (abd)^2(ack)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-2}, \\ \Delta''' &= (abd)(abk)(ack)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-1} = \Sigma R_i f_i, \\ \Delta^{iv} &= (abc)^2(adk)a_x^{n-3}b_x^{n-2}c_x^{n-1}d_x^{n-1} = \Delta'' = \Sigma S_i f_i. \end{aligned}$$

Or il est à remarquer que Δ' s'annule identiquement et que Δ''' se réduit facilement à Δ'' . En effet, Δ' change de signe, si l'on permute entre eux les symboles a et d . Quant à Δ''' , nous permutons les lettres b , d et faisons usage de l'identité

$$(abk)d_x - (adk)b_x = (abd)k_x - (bdk)a_x.$$

Il vient alors

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x \Delta'' - \frac{1}{2} (abd)(ack)(bdk) a_x^{n-2} b_x^{n-2} c_x^{n-1} d_x^{n-2}.$$

Au deuxième terme du second membre, nous pouvons remplacer, sans altérer sa valeur, les facteurs symboliques $(ack)(bdk)$ par

$$\frac{1}{3} [(ack)(bdk) - (bck)(adk) - (dck)(bak)] = \frac{1}{3} (acd)(bkk) = 0.$$

Il s'ensuit

$$\Delta''' = \frac{1}{2} k_x \cdot \Delta''.$$

Pour la dernière des cinq quantités (12) nous avons donc, au lieu de (17), cette relation plus simple

$$(18) \quad \begin{cases} 3\rho^3(n-1)a_x^{n-2}a_{dx}a_{d^2x} + \rho^3(n-1)(n-2)a_x^{n-3}a_{dx}^3 \\ = -3(n-1)\rho^2d\rho a_x^{n-2}a_{dx}^2 - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Phi''k_x^2. \end{cases}$$

8. Les équations précédentes, (17) et (18), nous servent à transformer les expressions (12), premiers éléments du déterminant (10) après la substitution $y = x + 3dx + 3d^2x + d^3x$. D'abord nous pouvons y omettre les termes

$$-3(s-1)\rho^2d\rho x_x^{s-2}x_{dx}^2, \quad \dots, \quad -3(n-1)\rho^2d\rho a_x^{n-2}a_{dx}^2;$$

car, en utilisant les trois dernières lignes du déterminant, ils peuvent s'écrire de façon qu'ils deviennent, d'après les calculs du n° 4, proportionnels aux termes de la deuxième ligne. De même, nous pouvons négliger, en vertu de $f = 0$ et $df = 0$, les termes qui contiennent les facteurs φ , $d\varphi$, etc.

De plus, nous pouvons y supprimer, en vertu de la relation $\Delta''' = \Sigma R_i f_i$, les termes dans lesquels figurent les expressions

$$\Phi''' = \Sigma R_i \varphi_i, \quad \Psi''' = \Sigma R_i \psi_i, \quad X''' = \Sigma R_i \gamma_i, \quad \Omega''' = \Sigma R_i \omega_i.$$

Il faut seulement retrancher en même temps, de la dernière des

quantités (12), l'expression

$$\frac{1}{2}(s-1)(6n+2s-13)\Delta'''k_x = \frac{1}{4}(s-1)(6n+2s-13)\Delta''k_x.$$

Enfin, Φ^v étant égal à $\Sigma S_i \varphi_i$, . . . , on peut y supprimer les termes

$$\frac{s-1}{4}(2s-2)\Phi^v.k_x^2, \quad \dots \quad \frac{s-1}{4}(2s-1)\Omega^v.k_x^2.$$

pourvu qu'on retranche, du second membre de (18), le produit

$$\frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta^v.k_x^2 - \frac{s-1}{4}(2s-1)\Delta''k_x^2.$$

Ainsi, les éléments de la première ligne du déterminant en question se présentent sous la forme suivante

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Phi'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Phi''.k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Psi'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Psi''.k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\chi'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\chi''.k_x^2, \\ & \frac{1}{2}(s-1)(s-2)\Omega'.k_x^3 - \frac{3}{2}(s-1)(n+s-3)\Omega''.k_x^2, \\ & - \left[\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(s-1)(3n+2s-7) \right] \Delta''.k_x^2. \end{aligned}$$

Ici, nous avons désigné par Ψ'' , χ'' , Ω'' ce que devient Φ'' quand on y remplace z respectivement par β , γ , δ .

Le déterminant lui-même prend donc cette valeur

$$(19) \quad D = \frac{1}{2}(s-1)(s-2)k_x^3 A - \frac{3}{2}k_x^2 B,$$

où nous avons posé

$$(20) \quad A = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & \chi' & \Omega' & 0 \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\chi & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$B = \begin{vmatrix} \tau\Phi'' & \tau\Psi'' & \tau\chi'' & \tau\Omega'' & \tau\Delta'' \\ (s-1)\Phi & (s-1)\Psi & (s-1)\chi & (s-1)\Omega & \frac{n+2s-3}{3}\Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

$$(20^a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = (s-1)(n+s-3), \\ r = \frac{1}{3} [(n-1)(n-2) + (s-1)(3n+2s-7)] \\ \quad = \sigma + \frac{1}{3} (n-1)(n-2) - \frac{1}{3} (s-1)(s-2) \\ \quad = \sigma + \frac{1}{3} (n-s)(n+s-3). \end{array} \right.$$

Il faut encore nous occuper de l'expression B pour en séparer un facteur k_x .

9. De la dernière relation entre r et σ , on tire

$$\frac{r}{\sigma} = 1 + \frac{n-s}{3(s-1)} = \frac{n+2s-3}{3(s-1)}.$$

Par conséquent, il vient, à l'aide de (15^a),

$$B = \sigma(s-1) \left| \begin{array}{ccccc} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1d_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2d_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3d_x \end{array} \right| (ack)b_x e_x f_x \Pi,$$

en faisant $e_x^n = f_x^n = d_x^n = f(x)$ et

$$(20^b) \quad \Pi = a_x^{n-3} b_x^{n-3} e_x^{n-3} f_x^{n-3} c_x^{n-1} d_x^{n-2} \alpha_x^{s-2} \beta_x^{s-2} \gamma_x^{s-2} \delta_x^{s-2}.$$

Cette expression sera transformée par l'identité

$$(ack)e_x = (ace)k_x + (aek)c_x + (eck)a_x.$$

Alors on obtient une somme de trois termes. Du premier se trouve séparé le facteur k_x ; le deuxième contient le facteur e_x^n et s'évanouit par conséquent; le troisième est égal, au signe près, à B, comme on le reconnaît aisément, en permutant entre elles les lettres a, e et b, f . Par suite, le premier terme de cette somme devient égal au double de la valeur de B, de sorte que

$$(21) \quad B = k_x \frac{\sigma(s-1)}{2} \left| \begin{array}{ccccc} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & \frac{r}{\sigma}(efd)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & d_1d_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & d_2d_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & d_3d_x \end{array} \right| (ace)b_x f_x \Pi$$

La substitution des valeurs (20) et (21) dans (19) conduit au théorème suivant, dont la démonstration était le but principal de nos recherches, savoir :

Les points où une courbe algébrique d'ordre, n , $f(x) = 0$, est touchée par une courbe d'ordre s du système linéaire

$$\varphi(x) + \alpha\psi(x) + \lambda\chi(x) + \mu\omega(x) = 0,$$

suivant un contact du troisième ordre, sont ses points d'intersection avec la courbe

$$(22) \quad (s-1)(s-2)A - 3B_0 = 0,$$

$B_0 k_x$ étant égal à B , et A , B étant définis par les équations (20) et (21), dans lesquelles r , σ sont donnés par (20^a), Π par (20^b), Φ' par (15^a) et Ψ' , X' , Ω' par des formations analogues, et où l'on a posé

$$\varphi(x) = \alpha_x^s, \quad \psi(x) = \beta_x^s, \quad \chi(x) = \gamma_x^s, \quad \omega(x) = \delta_x^s,$$

$$f(x) = a_x^n = b_x^n = c_x^n = d_x^n = e_x^n = f_x^n.$$

La courbe (22) est de l'ordre

$$4(n-3) + 2n - 3 + 4(s-2) + 6 = 4 \left[s + \frac{3}{2}(n-3) \right],$$

ce qui concorde avec une proposition générale que nous avons obtenue, par voie récurrente, dans notre édition des *Leçons de Clebsch* (1).

IV. — Sur la loi de réciprocité de M. BRILL.

10. Remarquons la forme sous laquelle se présente, dans (10), l'équation d'une courbe qui fait partie du système linéaire proposé et qui touche la courbe $f = 0$, à un point donné x , par un contact du deuxième ordre. Cette équation peut s'écrire (en coordonnées y_i)

$$(23) \quad \varphi(y)D_{\varphi}(x) + \psi(y)D_{\psi}(y) + \chi(y)D_{\chi}(x) + \omega(y)D_{\omega}(x) = 0,$$

(1) *Loc. cit.*, t. I, p. 735; t. III de la traduction de M. Benoist, p. 65.

pourvu que $D_{\frac{1}{2}}(x) = 0$ soit la courbe qui détermine par ses intersections avec $f = 0$ les points où celle-ci touche une courbe du système

$$\psi(y) + \lambda \gamma(y) + \mu \omega(y) = 0$$

par un contact du second ordre, etc.

Par là se trouve vérifiée, pour le cas actuel, la loi générale de réciprocité, due à M. Brill, et concernant d'une part les courbes $\varphi_i = 0$ d'un système linéaire γ fois infini et, d'autre part, les courbes $\Phi_i = 0$ qui déterminent dans un système partiel $(\gamma - 1)$ fois infini, contenu dans le premier système, les courbes touchant $f = 0$ par un contact d'ordre $\gamma - 1$. En effet, on sait ⁽¹⁾ que la forme de l'équation (23) reste la même pour le cas général, de sorte que

$$(24) \quad \varphi_0(y) \Phi_0(x) + \varphi_1(y) \Phi_1(x) + \dots + \varphi_\gamma(y) \Phi_\gamma(x) = 0$$

est, en variables y , l'équation d'une courbe qui touche $f = 0$ au point x , par un contact d'ordre $\gamma - 1$; et j'ai démontré que cette équation donne précisément le contenu de la loi que M. Brill avait obtenue d'une autre manière ⁽²⁾.

Une remarque analogue a lieu à l'égard d'un système quatre fois infini

$$(25) \quad \varphi(x) + \alpha \psi(x) + \lambda \gamma(x) + \mu \omega(x) + \nu \Xi(x) = 0.$$

Du résultat obtenu au n° 9, on déduit immédiatement que la courbe du système (25) qui touche $f = 0$ au point x par un contact du troisième ordre est représentée, en variables y , par l'équation

$$(26) \quad (s - 2)P - \frac{3}{2}(n + s - 3)Q = 0,$$

⁽¹⁾ *Op. cit.*, p. 172; t. II, p. 185 dans la traduction de M. Benoist.

⁽²⁾ *Mathematische Annalen*, t. IV, p. 527; 1871. Cette loi peut aussi être démontrée par l'application des intégrales abéliennes et des fonctions Θ ; voir mon Mémoire *Ueber eine Verallgemeinerung des Jacobi'schen Umkehrproblems der Abelschen Integrale* (*Berichte der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.*, Bd. VII).

où, si $\mathfrak{Z}(x) = \varepsilon_x^s$,

$$P = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \mathfrak{Z}(y) & 0 \\ \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & \Theta' & 0 \\ \Phi & \Psi & X & \Omega & \Theta & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} \Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & \omega_1 & \mathfrak{Z}_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & \omega_2 & \mathfrak{Z}_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & \omega_3 & \mathfrak{Z}_3 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) & \chi(y) & \omega(y) & \mathfrak{Z}(y) & 0 \\ (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} (abd)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} (efd)^2 \\ \alpha_1 \alpha_x & \beta_1 \beta_x & \gamma_1 \gamma_x & \delta_1 \delta_x & \varepsilon_1 \varepsilon_x & d_1 d_x \\ \alpha_2 \alpha_x & \beta_2 \beta_x & \gamma_2 \gamma_x & \delta_2 \delta_x & \varepsilon_2 \varepsilon_x & d_2 d_x \\ \alpha_3 \alpha_x & \beta_3 \beta_x & \gamma_3 \gamma_x & \delta_3 \delta_x & \varepsilon_3 \varepsilon_x & d_3 d_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (a_x e_x)^{n-3} (b_x f_x d_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x)^{s-2}.$$

La loi de réciprocité nous permet de plus d'énoncer, à l'égard de l'expression D dans (19) ou du premier membre de (22), la proposition suivante.

Désignons par $\Phi^0, \Psi^0, X^0, \Omega^0$ les quantités qui multiplient, dans (10), respectivement les fonctions $\varphi(y), \psi(y), \chi(y), \omega(y)$, de sorte que, par exemple,

$$\Omega^0 = (s-1) \begin{vmatrix} \Phi & \Psi & X & \frac{n+2s-3}{3(s-1)} \Delta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 & f_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remplace dans Ω^0 les courbes φ, ψ, χ par Φ^0, Ψ^0, X^0 , on obtient une nouvelle expression ω^0 , savoir

$$\omega^0 = (\tau-1) \begin{vmatrix} \varphi' & \psi' & \chi' & \frac{n+2\tau-3}{3(\tau-1)} \Delta \\ \Phi_1^0 & \Psi_1^0 & X_1^0 & f_1 \\ \Phi_2^0 & \Psi_2^0 & X_2^0 & f_2 \\ \Phi_3^0 & \Psi_3^0 & X_3^0 & f_3 \end{vmatrix}.$$

où $\tau = 3(n + s - 3)$, et en faisant $\Phi^n = \Phi_x^\tau, \dots$

$$\begin{aligned}\varphi' &= (\Phi ab)^2 \Phi_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, & \psi' &= (\Psi ab)^2 \Psi_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \\ \gamma' &= X(ab)^2 X_x^{\tau-2} a_x^{n-2} b_x^{n-2}, & \Phi_i^0 &= \Phi_x^{\tau-2} \Phi_i, \dots\end{aligned}$$

En vertu de $f = 0$, la fonction ω^0 doit être, à un facteur numérique près, égale à $\omega(x)$ multiplié par la deuxième puissance de l'expression $(s-1)(s-2)A - 3B_0$, qui figure au premier membre de (22).

11. A l'occasion de certaines recherches sur la théorie des correspondances, nous avons été conduit à considérer une courbe $M = 0$ (1), dont les intersections avec $f = 0$ jouissent de cette propriété qu'une courbe d'un système linéaire γ fois infini y a un point double tel que l'une de ses deux branches y touche la courbe $f = 0$ par un contact d'ordre $\gamma - 2$. L'équation de cette courbe s'obtient si l'on pose, dans l'équation (24), $x = y$ et si l'on sépare du résultat un facteur f , de sorte que

$$\varphi_0(x)\Phi_0(x) + \varphi_1(x)\Phi_1(x) + \dots + \varphi_\gamma(x)\Phi_\gamma(x) = M.f.$$

Pour les cas les plus simples, nous sommes maintenant à même d'indiquer la formation analytique de ce facteur M .

Pour $\gamma = 2$, on sait que la courbe $M = 0$ est la jacobienne du réseau proposé.

Pour $\gamma = 3$, il faut partir de l'équation (10). La substitution $y = x$ faite, on peut aisément transformer le déterminant de façon que les éléments de la première ligne horizontale prennent les valeurs

$$0, 0, 0, 0, \dots, f(x).$$

La courbe d'ordre $2n + 4s - 7$,

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi & X & \Omega \\ \varphi_1 & \psi_1 & \gamma_1 & \omega_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \gamma_2 & \omega_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \gamma_3 & \omega_3 \end{vmatrix} = 0$$

(1) *Op. cit.*, p. 737; t. III, p. 97 dans la traduction de M. Benoist.

détermine donc sur $f = 0$ les points où une courbe du système

$$\varphi(x) + \alpha\psi(x) + \lambda\gamma(x) + \mu\omega(x) = 0$$

a un point double tel que l'une de ses branches γ touche la courbe $f = 0$ par un contact du premier ordre.

Pour $\gamma = 4$, les déterminants P et Q, qui figurent au premier membre de (26), se transforment d'une manière analogue quand on a fait $y = x$. Les points de $f = 0$, où une courbe du système (25) a un point double tel que l'une de ses branches γ touche la courbe $f = 0$ par un contact du deuxième ordre, sont les intersections de $f = 0$ avec la courbe

$$(s - 2)R - \frac{3}{2}(n + s - 3)S = 0,$$

en posant

$$R = \begin{vmatrix} \Phi' & \Psi' & X' & \Omega' & \Theta' \\ \Phi & \Psi & X & \Omega & \Theta \\ \varphi_1 & \psi_1 & \gamma_1 & \omega_1 & \varepsilon_2 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \gamma_2 & \omega_2 & \varepsilon_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \gamma_3 & \omega_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} (ab\alpha)^2 & (ab\beta)^2 & (ab\gamma)^2 & (ab\delta)^2 & (ab\varepsilon)^2 \\ (ef\alpha)^2 & (ef\beta)^2 & (ef\gamma)^2 & (ef\delta)^2 & (ef\varepsilon)^2 \\ \alpha_1\alpha_x & \beta_1\beta_x & \gamma_1\gamma_x & \delta_1\delta_x & \varepsilon_1\varepsilon_x \\ \alpha_2\alpha_x & \beta_2\beta_x & \gamma_2\gamma_x & \delta_2\delta_x & \varepsilon_2\varepsilon_x \\ \alpha_3\alpha_x & \beta_3\beta_x & \gamma_3\gamma_x & \delta_3\delta_x & \varepsilon_3\varepsilon_x \end{vmatrix} (ace)$$

$$\times (\alpha_x e_x)^{n-3} (b_x f_x)^{n-2} c_x^{n-1} (\alpha_x \beta_x \gamma_x \delta_x \varepsilon_x)^s {}^2.$$

Sur certaines propriétés des centres de gravité;

par M. LAISANT.

(Séance du 20 janvier 1882.)

1. Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (2^e série, t. XX, p. 337), M. Resal a publié un article intitulé : *Note sur la généralisation d'un théorème de Pappus*, et qui a pour objet la démonstration de la proposition suivante :

Soient $A_1 A_2 \dots A_n A_1$ un polygone formé de n côtés, plan ou

gauche, m la masse de chacun des n points matériels, partant en même temps des sommets $A_1, A_2, \dots, A_n$, et dans le même sens, avec des vitesses constantes $V_1, V_2, \dots, V_n$, proportionnelles aux côtés $a_1 = A_1A_2, a_2 = A_2A_3, \dots$, ou A_nA_1 ; le centre de gravité des masses m reste fixe.

Le théorème de Pappus présente le même énoncé, s'appliquant simplement au triangle.

Si l'on y regarde de près, on voit que la proposition revient simplement à ceci : *Si l'on divise dans un même rapport les côtés successifs d'un polygone fermé, le centre de gravité des points de division (supposés de masses égales) est le même que le centre de gravité des sommets.*

J'ai démontré non seulement cette proposition, mais un certain nombre d'autres propriétés plus générales, dans une Communication faite en 1877 au Congrès du Havre et intitulée : *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française pour l'avancement des Sciences, compte rendu de la sixième Session, p. 142-154). Seulement, mon étude ne s'appliquait qu'aux polygones plans.

L'article de M. Resal ayant ramené mon attention sur ce point, j'ai tenté d'étendre aux polygones gauches quelques-uns de mes résultats, et cela m'a conduit ensuite à certaines conséquences d'une généralité plus grande encore.

C'est à l'exposé de cette généralisation, à laquelle l'algorithme des quaternions s'applique très facilement, qu'est consacré la présente Note.

2. Soit, comme plus haut, $A_1A_2 \dots A_nA_1$ un polygone fermé, gauche en général. Faisons passer par tous les sommets des droites parallèles entre elles, que nous prendrons pour axes de rotation. Puis, admettons que le côté A_1A_2 , tournant autour de l'axe passant par A_1 , d'un certain angle, le point A_2 vienne en B_2 ; de même, faisons tourner, du même angle et dans le même sens, les côtés $A_2A_3, \dots, A_nA_1$ autour des axes passant par $A_2, \dots, A_n$, si bien que les points $A_3, \dots, A_1$ viennent occuper les nouvelles positions $B_3, \dots, B_1$.

Je dis tout d'abord que le centre de gravité des points $B_1, B_2, \dots, B_n$ sera le même que celui des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Pour le démontrer, je représente par Q un quaternion ayant pour axe et pour angle l'axe et l'angle de chacune des rotations.

On sait alors (voir, par exemple, *Introduction à la méthode des quaternions*, p. 172) que ces rotations seront représentées par l'opération

$$Q^{-1}(\quad)Q.$$

Nous aurons donc

$$A_1 B_2 = Q^{-1} \cdot A_1 A_2 \cdot Q,$$

ou, en remplaçant $A_1 B_2, A_1 A_2$ par $B_2 - A_1, A_2 - A_1$, l'origine des vecteurs étant quelconque,

$$B_2 - A_1 = Q^{-1}(A_2 - A_1)Q = Q^{-1}A_2Q - Q^{-1}A_1Q.$$

De même,

$$\begin{aligned} B_3 - A_2 &= Q^{-1}A_3Q - Q^{-1}A_2Q, \\ &\dots\dots\dots, \\ B_n - A_{n-1} &= Q^{-1}A_nQ - Q^{-1}A_{n-1}Q, \\ B_1 - A_n &= Q^{-1}A_1Q - Q^{-1}A_nQ, \end{aligned}$$

et, par addition,

$$\Sigma B - \Sigma A = 0,$$

ce qui démontre la proposition, en divisant le premier membre par n .

3. Si maintenant nous divisons $A_1 B_2, A_2 B_3, \dots, A_n B_1$ dans le même rapport, en $C_2, C_3, \dots, C_1$, le centre de gravité des points de division C sera encore le même que le centre de gravité de points A . Car nous aurons

$$A_1 C_2 = k A_1 B_2, \quad \text{ou} \quad C_2 - A_1 = k(B_2 - A_1),$$

et, de même,

$$\begin{aligned} C_3 - A_2 &= k(B_3 - A_2), \\ &\dots\dots\dots, \\ C_1 - A_n &= k(B_1 - A_n); \end{aligned}$$

d'où, par addition,

$$\Sigma C - \Sigma A = k(\Sigma B - \Sigma A) = 0.$$

4. Prenons maintenant un système de droites quelconques dans l'espace $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$, au lieu de considérer les côtés successifs d'un polygone fermé; et supposons que toutes ces

droites tournent à la fois, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par les points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Les points $B_1, B_2, \dots, B_n$ prendront ainsi de nouvelles positions $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$.

Je désigne par $G_a, G_b, G_{b'}$ les centres de gravité des points A , des points B et des points B' , respectivement; les masses pouvant même varier d'un point à un autre, mais étant toujours les mêmes pour les trois points A_i, B_i, B'_i de même indice.

Dans ces conditions, le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b tournant autour d'un axe de rotation passant par G_a , parallèle aux premiers, et cela du même angle et dans le même sens.

Pour le démontrer, je représente toujours par $Q^{-1} () Q$ le symbole de la rotation commune. J'aurai alors, comme ci-dessus,

$$\begin{aligned} B'_1 - A_1 &= Q^{-1} B_1 Q - Q^{-1} A_1 Q, \\ B'_2 - A_2 &= Q^{-1} B_2 Q - Q^{-1} A_2 Q, \\ &\dots\dots\dots, \\ B'_n - A_n &= Q^{-1} B_n Q - Q^{-1} A_n Q. \end{aligned}$$

Multipliant respectivement ces relations par les masses correspondantes $m_1, m_2, \dots, m_n$, puis ajoutant, j'obtiens

$$\Sigma m B' - \Sigma m A = Q^{-1} \Sigma m B \cdot Q - Q^{-1} \Sigma m A \cdot Q;$$

c'est-à-dire, en divisant par la masse totale Σm ,

$$G_{b'} - G_a = Q^{-1} G_b Q - Q^{-1} G_a Q = Q^{-1} (G_b - G_a) Q,$$

ou encore

$$G_a G_{b'} = Q^{-1} \cdot G_a G_b \cdot Q,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarquons immédiatement que, dans le cas du polygone fermé, considéré tout d'abord, les points G_b et G_a coïncident, et que, par suite, $G_{b'}$ doit coïncider aussi avec eux. Ce n'est donc qu'un cas particulier de la propriété plus générale à laquelle nous sommes arrivé maintenant.

§. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que, si les points $C_1, C_2, \dots, C_n$ divisent dans un même rapport les droites $A_1 B'_1, A_2 B'_2, \dots, A_n B'_n$, leur centre de gravité G_c divisera dans le

même rapport la droite $G_a G_{b'}$. Mais, joignant ce dernier résultat à celui que nous venons d'obtenir, nous pourrions donner une forme physique assez intéressante à la proposition qui nous occupe.

Pour cela, remarquons que nous pouvons considérer les droites A_i, B_i comme appartenant à autant de corps de même nature, dont les points B_i seraient les centres de gravité respectifs. Si ces corps passent par des températures différentes, ils se dilateront ou se contracteront dans le même rapport, c'est-à-dire que les droites A_i, B_i varieront elles-mêmes de longueur, proportionnellement.

Ceci posé, nous pourrions énoncer cette proposition :

Si plusieurs corps de même nature tournent dans le même sens autour d'axes parallèles entre eux, avec la même vitesse angulaire et dans un milieu dont la température soit variable, leur centre de gravité se meut comme s'il appartenait à un corps de même nature, tournant dans le même milieu autour d'un axe parallèle aux premiers, et avec la même vitesse angulaire.

Cet axe moyen de rotation s'obtient en prenant un point quelconque sur chacun des axes individuels, et en déterminant le centre de gravité de ces points, respectivement affectés des masses des corps correspondants. Ce centre de gravité appartient à l'axe moyen.

Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce; par M. GOURSAT.

(Séance du 17 février 1882.)

1. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 28 avril 1879, M. Picard a montré que toute fonction multiforme de la variable complexe x , n'ayant, dans toute l'étendue du plan ou de la sphère, que trois points singuliers, le point $x=0$, le point $x=1$ et le point à l'infini, pouvait être considérée comme une fonction uniforme du rapport $\omega = \frac{iK'}{K}$; K et K' sont définis,

pour des valeurs quelconques de x , par l'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle ils satisfont (Fuchs, *Journal de Borchardt*, t. 71)

$$(1) \quad x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0.$$

La fonction ω de la variable x , ainsi définie, n'a, dans toute l'étendue du plan, que les trois points critiques 0, 1, ∞ , et jouit des propriétés suivantes : pour toute valeur de x , le coefficient de i dans ω , mis sous la forme ordinaire des imaginaires, est positif ; de plus, si l'on part d'un point A du plan avec une valeur initiale ω_0 , et que l'on fasse décrire à la variable x un chemin fermé quelconque, ne passant par aucun des points 0 et 1, on revient au point de départ avec une valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels satisfaisant à la condition $ad - bc = 1$. En s'appuyant sur les propriétés précédentes, il est aisé de démontrer que, si le chemin décrit par la variable x ne peut être réduit au point A sans franchir aucun des points 0 et 1, la fonction ω ne reviendra jamais à la valeur initiale. Je renverrai, pour la démonstration, au Mémoire de M. Picard (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure*, t. IX, p. 149). Il en résulte qu'il y a un seul chemin pour la variable x qui conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, en regardant comme identiques tous les chemins qui peuvent être réduits à l'un d'entre eux, sans franchir aucun des points 0 et 1.

2. Il m'a paru intéressant de chercher à démontrer cette propriété, en m'appuyant uniquement sur la manière dont se permutent les intégrales de l'équation (1) dans le voisinage de l'un des points critiques.

Posons

$$\varphi(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \right]^2 x^m,$$

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \right]^2 B_m x^m,$$

$$B_m = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2m}.$$

Dans le domaine du point $x = 0$, l'équation (1) admet les deux

intégrales

$$\begin{aligned} P &= \varphi(x), \\ Q &= 4\psi(x) + \varphi(x) \log x. \end{aligned}$$

De même, dans le domaine du point $x = 1$, elle admet les deux intégrales

$$\begin{aligned} P' &= \varphi(1-x), \\ Q' &= \varphi(1-x) \log(1-x) + 4\psi(1-x). \end{aligned}$$

Je prendrai pour valeurs initiales $K = \varphi(x)$, $K' = \varphi(1-x)$: K et K' seront des fonctions uniformes de x dans toute l'étendue du plan, pourvu que le chemin suivi par la variable soit assujéti à ne couper aucune des lignes indéfinies $-\infty \dots 0, 1 \dots +\infty$. J'adopterai de même, comme valeur initiale de ω , la valeur $\omega_0 = \frac{i\varphi(x)}{\varphi(1-x)}$; ω_0 sera une fonction uniforme de x à la même condition que K et K' . Voyons maintenant ce que devient ω_0 , quand on fait décrire à la variable x un lacet autour de l'un des points critiques dans un sens ou dans l'autre. Entre les quatre intégrales P, Q, P', Q' , on a, dans la partie commune aux deux domaines, les relations

$$\begin{aligned} P' &= \frac{4 \log 2}{\pi} P - \frac{1}{\pi} Q, \\ P &= \frac{4 \log 2}{\pi} P' - \frac{1}{\pi} Q'. \end{aligned}$$

Par un lacet décrit autour du point $x = 0$ dans le sens direct, Q se change en $Q + 2i\pi P$; par suite, P' se change en $P' - 2iP$. La valeur du rapport ω , après ce chemin, sera donc

$$\frac{i(P' - 2iP)}{P} = \omega_0 - 2.$$

Par un lacet décrit autour du même point critique dans le sens rétrograde, ω_0 se changerait en $\omega_0 + 2$. De même, par un lacet décrit autour du point $x = 1$, $\frac{1}{\omega_0}$ se change en $\frac{1}{\omega_0} \pm 2$, suivant que ce lacet est décrit dans le sens direct ou dans le sens rétrograde.

3. Cela posé, comme tout chemin fermé se ramène à une suite de lacets décrits autour des points 0 et 1 dans un sens ou dans l'autre, il est clair que nous n'avons qu'à étudier les valeurs que

l'on déduit de la valeur ω_0 , en appliquant les substitutions précédentes un nombre quelconque de fois et dans un ordre arbitraire. On voit d'abord que l'on est conduit à un nombre infini de valeurs différentes, qui sont toutes de la forme $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, a, b, c, d étant quatre entiers réels, tels que $ad - bc = 1$. Si l'on est arrivé, après un certain nombre de lacets, à la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, un nouveau lacet, décrit autour du point $x = 0$, conduira à l'une des valeurs

$$\frac{a\omega_0 + b + 2a}{c\omega_0 + d + 2c}, \quad \frac{a\omega_0 + b - 2a}{c\omega_0 + d - 2c};$$

un lacet décrit autour du point $x = 1$ conduirait à l'une des deux valeurs

$$\frac{(a + 2b)\omega_0 + b}{(c + 2d)\omega_0 + d}, \quad \frac{(a - 2b)\omega_0 + b}{(c - 2d)\omega_0 + d}.$$

Le théorème qu'il s'agit de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Il n'y a qu'une suite de substitutions de la forme précédente, appliquées dans un ordre déterminé, qui conduise de la valeur ω_0 à une quelconque des valeurs que peut prendre la fonction ω pour la même valeur de la variable.

4. Pour abréger, j'appellerai valeurs *voisines* de ω des valeurs, telles, que l'on passe de l'une à l'autre, en faisant décrire à la variable un lacet unique autour de l'un des points critiques. Les quatre valeurs voisines de la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ sont les quatre valeurs écrites plus haut. J'appelle A la somme toujours positive $(a + c)^2 + (b + d)^2$; c'est l'étude de la variation de cette somme, quand on passe d'une valeur de ω à une valeur voisine, qui m'a permis de démontrer le théorème en question.

Considérons la somme A relative à une valeur particulière de ω , et les sommes analogues relatives aux valeurs voisines, que je désignerai par A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2} . On aura

$$\begin{aligned} A &= (a + c)^2 + (b + d)^2, \\ A_1 &= (a - c)^2 + (b + d + 2a + 2c)^2, \\ A_{-1} &= (a + c)^2 + (b - d - 2a - 2c)^2, \\ A_2 &= (a - c + 2b - 2d)^2 + (b + d)^2, \\ A_{-2} &= (a + c - 2b - 2d)^2 + (b + d)^2. \end{aligned}$$

Posons encore

$$D_1 = A_1 - A, \quad D_{-1} = A_{-1} - A,$$

$$D_2 = A_2 - A, \quad D_{-2} = A_{-2} - A;$$

on a

$$D_1 = 4(a+c)(a+c+b-d),$$

$$D_{-1} = 4(a+c)(a+c-b-d),$$

$$D_2 = 4(b+d)(a+c+b-d),$$

$$D_{-2} = 4(b+d)(b+d-a-c),$$

et enfin

$$\Delta_1 = D_1 D_{-1} = 16(a+c)^2 [(a+c)^2 - (b+d)^2],$$

$$\Delta_2 = D_2 D_{-2} = 16(b+d)^2 [(b+d)^2 - (a+c)^2].$$

Je distinguerai maintenant plusieurs cas :

PREMIER CAS. — Soit $a+c \neq 0$, $b+d \neq 0$, $(a+c)^2 \neq (b+d)^2$.

Les deux nombres Δ_1 , Δ_2 sont différents de zéro et de signes contraires. Supposons, par exemple, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$; le produit $D_1 D_{-1}$ est positif, ainsi que la somme $D_1 + D_{-1} = 8(a+c)^2$; les deux nombres D_1 , D_{-1} sont donc positifs. Le produit $D_2 D_{-2}$ étant négatif, l'un des deux nombres D_2 , D_{-2} est positif, l'autre négatif. Donc, *des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , trois sont positifs, un seul est négatif.*

DEUXIÈME CAS. — Soit $a+c \neq 0$, $(a+c)^2 = (b+d)^2$.

On aura $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Comme la somme $D_1 + D_{-1}$ est encore positive, l'un des deux nombres D_1 , D_{-1} sera nul, l'autre positif. Il en sera de même des deux nombres D_2 , D_{-2} . Ainsi, *des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , deux seront nuls, deux positifs.*

TROISIÈME CAS. — Soit $a+c = 0$, $b+d \neq 0$.

Les deux nombres D_1 , D_{-1} seront nuls; D_2 , D_{-2} seront positifs. D'où la même conclusion que dans le cas précédent. On arriverait encore à la même conclusion en supposant $a+c \neq 0$, $b+d = 0$.

On ne peut supposer à la fois $a+c = 0$, $b+d = 0$, car la fraction $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ se réduirait à -1 .

En résumé, des quatre nombres D_1 , D_{-1} , D_2 , D_{-2} , relatifs à une valeur quelconque de ω , ou bien trois seront positifs et un seul négatif, ou bien deux seront nuls, les deux autres étant positifs.

Quand on passera d'une valeur de ω à l'une des quatre valeurs voisines, deux cas seulement pourront se présenter. Dans le premier cas, la somme A est plus grande pour trois des valeurs voisines que pour la valeur proposée, et plus petite pour une seule. Dans le second cas, elle reste la même pour deux des valeurs voisines, et va en augmentant pour les deux autres.

5. Supposons maintenant que l'on parte de la valeur ω_0 , ce qui revient à supposer $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1$. On a $A = 2$, et, comme $a + c = b + d = 1$, on se trouve placé dans le second cas. Il y aura donc deux valeurs voisines de la valeur ω_0 pour lesquelles A sera encore égal à 2 ; ce sont les valeurs

$$\frac{\omega_0}{2\omega_0 + 1}, \quad \frac{\omega_0 - 2}{1};$$

si nous partons de la valeur $\frac{\omega_0 - 2}{1}$, nous nous trouvons encore dans le second cas, et l'on en déduit une nouvelle valeur $\frac{-3\omega_0 - 2}{2\omega_0 + 1}$, pour laquelle on a encore $A = 2$. En continuant ainsi, et en opérant de même avec la valeur $\frac{-\omega_0}{-2\omega_0 + 1}$, on arrivera à former une série linéaire, illimitée dans les deux sens, de valeurs telles que la somme correspondante A est égale à 2 :

$$(2) \left\{ \begin{array}{cccccc} \dots, & \frac{-3\omega_0 - 4}{4\omega_0 + 5}, & \frac{-3\omega_0 + 2}{4\omega_0 - 3}, & \frac{\omega_0 + 2}{-2\omega_0 - 3}, & \frac{\omega_0}{-2\omega_0 + 1}, & \\ \frac{\omega_0}{1}, & \frac{\omega_0 - 2}{1}, & \frac{-3\omega_0 - 2}{2\omega_0 + 1}, & \frac{-3\omega_0 + 4}{2\omega_0 - 3}, & \frac{5\omega_0 + 4}{-4\omega_0 - 3}, & \\ & & \frac{5\omega_0 - 6}{-4\omega_0 + 5}, & \frac{7\omega_0 - 6}{-6\omega_0 + 5}, & \dots & \end{array} \right.$$

Prenons maintenant l'une quelconque v de ces valeurs ; outre les deux valeurs voisines de v qui font partie de cette série, il y en a deux autres pour lesquelles la somme A est plus grande que 2. Soit v_1 l'une d'elles ; quand on passe de v à v_1 , la somme A va en augmentant. Si de v_1 on passe à une nouvelle valeur voisine v_2 , A ira encore en augmentant, car on se trouve placé dans le premier cas, et il n'y aurait qu'un moyen de faire diminuer A : ce serait de repasser à la valeur v . Si de v_2 on passe à une nouvelle valeur

v_3 , Λ ira encore en augmentant, pour la même raison que tout à l'heure. Et le raisonnement s'appliquant de proche en proche, on voit que, pourvu qu'on n'applique pas deux substitutions inverses l'une de l'autre successivement, Λ ira toujours en augmentant.

Considérons un chemin fermé conduisant de la valeur ω_0 à une valeur $\frac{a\omega_0 - b}{c\omega_0 + d}$, et supposons-le remplacé par un certain nombre de lacets. Imaginons en même temps la suite des valeurs par lesquelles on passe pour arriver de ω_0 à $\frac{a\omega_0 - b}{c\omega_0 + d}$; cette suite se composera d'un certain nombre de valeurs comprises dans la série précédente (ce nombre pouvant être l'unité), suivie d'un certain nombre de valeurs qui ne seront pas comprises dans la série. Comme on peut toujours supposer qu'on ne rencontre pas deux lacets parcourus successivement dans des sens contraires, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, *la somme Λ ne va jamais en diminuant quand on passe d'une valeur à la valeur suivante.*

Inversement, supposons que l'on remonte la suite des lacets qui a conduit de la valeur ω_0 à la valeur $\frac{a\omega_0 - b}{c\omega_0 + d}$; on repassera par toutes les valeurs intermédiaires, mais dans l'ordre inverse. Donc, *quand on remonte de la valeur finale à la valeur initiale ω_0 , la somme Λ ne va jamais en augmentant quand on passe d'une valeur à la suivante.*

Il y aura maintenant deux cas à distinguer :

PREMIER CAS. — La valeur finale $\frac{a\omega_0 - b}{c\omega_0 + d}$ fait partie de la série illimitée écrite plus haut. Il est clair que toutes les valeurs intermédiaires devront faire partie de la même série ; ce seront précisément les valeurs comprises entre ω_0 et $\frac{a\omega_0 - b}{c\omega_0 + d}$ dans cette série. La suite des lacets, qui ramène de la valeur finale à la valeur initiale, est donc complètement déterminée.

DEUXIÈME CAS. — La valeur finale ne fait pas partie de la série (2). Soit v_p cette valeur ; parmi les valeurs voisines, il y en aura une seule pour laquelle Λ sera moindre que pour v_p . Soit v_{p-1} cette valeur ; d'après ce qu'on vient de voir, v_{p-1} sera la valeur précédant immédiatement v_p . Si v_{p-1} fait partie de la série écrite plus haut,

on est ramené au cas précédent; dans le cas contraire, en opérant sur v_{p-1} comme on a opéré sur v_p , on en déduira une autre valeur v_{p-2} qui précédera v_{p-1} En continuant ainsi, comme A va toujours en diminuant, on finira par arriver à une valeur v_2 , à partir de laquelle A ne pourra plus diminuer. Cette valeur fera partie de la série (2), et l'on sera ramené au cas précédent.

On voit donc que la suite des lacets qui ramène de la valeur $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$ à la valeur ω_0 est complètement déterminée; et, par suite, il en est de même du chemin inverse.

C. Q. F. D.

6. J'ajouterai seulement les remarques suivantes :

Remarque I. — Toutes les valeurs que l'on déduit de la valeur ω_0 sont de la forme $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$, où a, b, c, d sont quatre entiers réels vérifiant la relation $ad - bc = 1$. Mais on n'obtient pas ainsi toutes les valeurs de cette forme; ainsi, quel que soit le chemin suivi par la variable, on ne parviendra jamais à la valeur $\frac{-1}{\omega_0}$; car, si l'on arrivait à cette valeur, elle devrait faire partie de la série (I), et il est aisé de s'assurer qu'elle n'est pas comprise dans cette série.

Remarque II. — Considérons les quatre substitutions suivantes :

$$S^1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad T^1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};$$

il résulte de ce qui précède qu'il n'existe aucune substitution composée des substitutions S et T , telle que

$$S^p T^q S^{p_1} T^{q_1} \dots S^{p_n} T^{q_n},$$

qui se réduise à la substitution identique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, à moins de supposer nuls tous les nombres p et tous les nombres q . Au moyen des substitutions S et T , il sera facile de composer des groupes d'un nombre quelconque de substitutions jouissant de la même propriété.

Remarques sur la théorie des régions et des aspects;
par M. LAISANT.

(Séance du 3 février 1882.)

1. Dans la dernière séance de la Société mathématique, M. Halphen a fait une intéressante Communication sur le problème des différents *aspects* sous lesquels on peut voir un système de points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté.

Pour donner à l'énoncé de ce problème de Géométrie de situation la précision désirable, M. Halphen définit un aspect par la permutation qui indique l'ordre dans lequel les points apparaissent autour de l'observateur, deux permutations représentant le même aspect lorsqu'on peut les déduire circulairement l'une de l'autre.

Il apparaît immédiatement, d'après cela, que pour deux points il n'y a qu'un aspect imaginable, que pour trois points il y a deux aspects, et que pour n points on peut imaginer $(n-1)!$ aspects différents.

Mais, en général, ces aspects imaginables ne sont pas tous possibles; et c'est déjà faire un pas vers la solution du problème que de fixer une limite supérieure du nombre des aspects possibles pour un système de n points.

2. Supposons que, ces n points étant donnés sur un plan, nous venions à les joindre deux à deux par des droites de toutes les manières possibles.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites ainsi tracées diviseront le plan en un certain nombre de régions, les unes fermées de toutes parts, les autres illimitées. Or, il est bien évident que, lorsqu'un observateur circulera, sans en sortir, dans l'une de ces régions, il verra toujours le système des n points sous le même aspect. Par suite, la détermination du nombre de ces régions nous donnera une limite supérieure du nombre des aspects possibles.

3. J'ai démontré, dans une communication au Congrès d'Alger, en 1881, que m droites prises au hasard sur un plan déterminent

$1 + \frac{m(m+1)}{2}$ régions, dont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ limitées, et $2m$ illimitées.

Mais on n'aurait pas le nombre des régions pour le problème qui nous occupe en remplaçant simplement dans ces formules m par $\frac{n(n-1)}{2}$, car les droites présentent ici cette particularité, que par un point quelconque du système passent $n-1$ d'entre elles.

Il y a par conséquent, en chacun des points, perte de $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ régions, toutes limitées, résultat qu'on obtient en remplaçant m par $n-1$. Pour les n points considérés, cela nous fera donc $\frac{n(n-2)(n-3)}{2}$ régions perdues.

Le calcul, d'ailleurs bien facile, montre, d'après cela, qu'il nous restera

$$\frac{1}{8}(n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 8)$$

régions, dont

$$\frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2 - 3n + 4)$$

régions limitées, et $n(n-1)$ régions illimitées.

4. L'évaluation numérique sera facile, au moyen des différences, et nous pourrons ainsi former le tableau suivant, que nous construisons depuis $n=2$ jusqu'à $n=15$.

Dans ce tableau, n représente le nombre des points du système, m le nombre des droites qui les unissent deux à deux, ρ_i le nombre des régions illimitées, ρ_l celui des régions limitées, ρ le nombre total des régions, c'est-à-dire $\rho_i + \rho_l$, et enfin $\alpha = (n-1)!$ le nombre des aspects imaginables.

n	m	ρ_i	ρ_l	ρ	α
2	1	2	0	2	1
3	3	6	1	7	2
4	6	12	6	18	6
5	10	20	21	41	24
6	15	30	55	85	120
7	21	42	120	162	720
8	28	56	231	287	5040
9	36	72	406	478	40320
10	45	90	666	756	362880

n	m	ρ_1	ρ_2	ρ	α
11	55	110	1035	1145	3628800
12	66	132	1540	1672	39916800
13	78	156	2211	2367	479001600
14	91	182	3081	3263	6227020800
15	105	210	4186	4396	87178291200

Le nombre ρ des régions, comme on le voit, est supérieur au nombre des aspects imaginables α tant que le nombre des points du système ne surpasse pas 5. Mais, au delà, ce nombre ρ devient inférieur à α ; et, par suite, les aspects imaginables ne sont pas tous possibles, puisque ρ marque une limite supérieure du nombre des aspects possibles. Le rapport $\frac{\rho}{\alpha}$ décroît très vite, et pour $n = 15$, limite du tableau ci-dessus, il est inférieur à $\frac{1}{10^7}$, c'est-à-dire que, pour 15 points, il n'y a pas, en moyenne, un aspect possible sur 10 millions d'aspects imaginables.

5. En fait, le nombre des aspects possibles est inférieur de beaucoup à celui des régions que nous venons de déterminer. Il est même inférieur à celui des régions qui subsistent lorsqu'on supprime les portions de chaque droite comprises entre deux points quelconques du système.

Si nous prenons 4 points, à titre d'exemple, nous aurons les deux figures suivantes, selon que ces quatre points forment ou non un quadrilatère convexe :



Dans le premier cas, le nombre des régions se réduit à 11; dans le second cas, à 9; tandis qu'il était de 18 avant la suppression des parties comprises entre deux points quelconques.

On voit, d'après cela, combien le problème général doit être difficile; car il ne semble pas aisé, pour un nombre de points quelconque, d'introduire une notation faisant ressortir leurs positions

relatives, et cependant cette disposition générale de la figure a une influence capitale sur le résultat.

Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. WEILL.

(Séance du 3 février 1882.)

Soit un triangle ABC, dans lequel B est égal à $(n + 1)$ fois l'angle A, désignons par a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} ses côtés; si nous menons une droite BD faisant avec BA un angle égal à $\widehat{A}$, le triangle BDE, formé en menant DE parallèle à AB, aura un angle $\widehat{DBE}$ qui vaudra n fois l'angle $\widehat{EDB}$; si l'on désigne par a_n , b_n , c_n les côtés de ce nouveau triangle, et par λ le rapport des côtés du triangle CDE au triangle CAB auquel il est semblable, on trouve facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1}(1 - \lambda), \\ b_n &= c_{n+1}\lambda, \\ c_n &= b_{n+1}(1 - \lambda), \\ \lambda &= \frac{b_n^2}{b_n^2 + c_n^2 - a_n^2}. \end{aligned}$$

La dernière formule s'obtient en calculant la longueur de DE, bissectrice de l'angle D, dans le triangle CDB.

Ceci posé, si a_n , b_n , c_n représentent des nombres entiers, les formules précédentes donnent pour a_{n+1} , b_{n+1} et c_{n+1} des valeurs commensurables, qui sont

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ b_{n+1} &= \frac{c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ c_{n+1} &= \frac{b_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{b_n^2}. \end{aligned}$$

Nous supposons b_n , c_n et a_n premiers entre eux et nous voulons trouver pour b_{n+1} , a_{n+1} , c_{n+1} des nombres entiers premiers entre

eux ; d'après cela, nous pouvons déjà adopter les valeurs entières

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = c_n b_n, \\ b_{n+1} = c_n b_n, \\ c_{n+1} = c_n^2 - a_n^2. \end{cases}$$

Or un calcul direct, très facile, donne les formules qui conviennent à $n = 2$ et à $n = 3$, et l'on trouve, en désignant par q et p deux nombres entiers premiers entre eux,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_2 &= qp, & b_3 &= c_2 q, \\ c_2 &= p^2 - q^2. \end{aligned}$$

Admettons la généralité de la loi, c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q^n q, \\ b_{n+1} &= c_n q, \\ c_{n+1} &= \frac{c_n^2 - a_n^2}{c_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont autres que les formules (1), après que l'on a divisé les seconds membres par le nombre entier $\frac{b_n}{q} = c_{n-1}$; elles représenteront des nombres entiers premiers entre eux, pourvu que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier, et que les deux nombres b_n et $(b_n^2 - a_n^2)$ ne puissent avoir d'autre facteur commun que $\frac{b_n}{q}$; ce dernier point est évident, car les quotients de b_n et de $(c_n^2 - a_n^2)$ par $\frac{b_n}{q}$ ne pourraient avoir de facteur premier commun qu'un facteur premier de q , qui diviserait $c_n^2 - a_n^2$, et, par suite, diviserait à la fois c_n , a_n et b_n , puisque a_n et b_n sont multiples de q .

Reste à prouver que l'expression de c_{n+1} représente un nombre entier. Pour cela, partons d'un triangle isocèle ayant pour côtés q et p , et dont φ est l'angle à la base, on aura $\cos \varphi = \frac{p}{2q}$; si cet angle φ appartient à tous les triangles dont nous parlons, et y est opposé au côté a , on aura

$$\frac{a_{n-1}}{\sin \varphi} = \frac{b_{n-1}}{\sin (n-1)\varphi} = \frac{c_{n-1}}{\sin n\varphi}.$$

Or on a

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = 2^{n-1} \cos^{n-1} \varphi - 2^{n-3} \frac{(n-2)}{1} \cos^{n-3} \varphi + \dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \frac{p^{n-1}}{2^{n-1} q^{n-1}} - \dots$$

Donc, si l'on prend pour a_{n-1} le nombre entier q^{n-1} , l'expression correspondante de c_{n-1} sera un nombre entier. Donc enfin, les formules générales qui résolvent la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= c_{n-1} q, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = p^n - \frac{n-1}{1} p^{n-2} q^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} p^{n-4} q^4 + \dots \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs, $q < p < 2q$.

L'analyse précédente prouve que les seules solutions de la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont celles dans lesquelles a_n est la $n^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier; elle démontre en outre que, si l'on considère la suite,

$$\begin{aligned} a_1 &= q, & a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_1 &= q, & b_2 &= qp, & b_3 &= q c_2, \\ c_1 &= p, & c_2 &= p^2 - q^2, & c_3 &= \frac{c_2^2 - q^4}{c_1}; \\ a_n &= q^n, \\ b_n &= q c_{n-1}, \\ c_n &= \frac{c_{n+1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}}, \end{aligned}$$

les quantités c_n divisent algébriquement les quantités

$$(c_{n+1}^2 - q^{2n+2}).$$

Parmi les triangles répondant à la question, il en existe dans lesquels les nombres entiers qui représentent les trois côtés sont consécutifs.

Lorsque l'un des angles doit être double de l'autre, on trouve facilement que le seul triangle est celui dont les côtés sont représentés par les nombres 4, 5, 6. D'après cela, soit un triangle général, dans lequel les côtés soient représentés par trois entiers

consécutifs; une première hypothèse à examiner est la suivante :

$$\begin{aligned}a_n &= q^n, \\b_n &= c_{n-1}q = q^n + 1, \\c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = q^n + 2.\end{aligned}$$

On en déduit

$$q^2(q^n + 2)c_{n-2} = 2q^n + 1,$$

et n est au moins égal à 3, car nous avons parlé du cas de $n = 1$ et $n = 2$: donc c_{n-2} existe et est au moins égal à 1; l'égalité précédente est alors impossible, à moins de faire $q = 1$, ce qui ne donne pas de véritable triangle. Reste à examiner la deuxième hypothèse,

$$\begin{aligned}a_n &= q^n, \\b_n &= q^n + 2, \\c_n &= q^n + 1;\end{aligned}$$

on en tire $c_{n-2} = \frac{4}{q^2}$, ce qui exige $q = 2$ et $c_{n-2} = 1$; cette dernière relation exige $n = 2$, car, si n était supérieur à 2, c_{n-2} serait plus grand que 1; cela est impossible, parce que si n est, par exemple, égal à 3, c_1 serait égal à 1, et a_1 et b_1 seraient supérieurs à c_1 .

Donc, enfin, le seul triangle dont les côtés soient représentés par 3 entiers consécutifs, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, est celui qui a un angle double d'un autre, et dont les côtés sont représentés par les nombre 4, 5, 6. Dans le cas général, il faut remarquer que c_n doit avoir une valeur positive; il faut donc que l'on ait

$$c_{n-1} > q^{n-1}.$$

Si donc on a choisi pour q un nombre entier quelconque, il faut prendre pour p un nombre entier premier avec q , plus petit que $2q$ et, en outre, plus grand que mq , m étant un nombre qui dépend de la valeur de n que l'on considère. Nous donnons les formules relatives à $n = 2, 3, 4, 5$,

$$\begin{array}{ll}a_2 = q^2, & b_2 = qp, & c_2 = p^2 - q^2, \\a_3 = q^3, & b_3 = q(p^2 - q^2), & c_3 = p(p^2 - 2q^2), \\a_4 = q^4, & b_4 = qp(p^2 - 2q^2), & c_4 = (p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 - pq), \\a_5 = q^5, & b_5 = q(p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 - pq), & c_5 = p(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2).\end{array}$$

Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par M. APPELL.

(Séance du 3 mars 1882.)

La formule de réduction pour les fonctions Θ de deux variables que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 13 février 1882 peut être généralisée de la façon suivante :

I. Considérons la fonction

$$(1) \quad \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) = \sum_{m_i = -\infty}^{m_i = +\infty} e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_p x_p + \varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)},$$

où $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$ désigne la forme quadratique

$$\sum_{i, j=1}^{i, j=p} a_{ij} m_i m_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Supposons que les périodes relatives à x_p ,

$$2\pi\sqrt{-1}, 2a_{p1}, 2a_{p2}, \dots, 2a_{pp},$$

soient liées par $(p-1)$ relations distinctes à coefficients entiers de la forme

$$(2) \quad k_{i1}a_{p1} + k_{i2}a_{p2} + \dots + k_{ip}a_{pp} = h_i\pi\sqrt{-1}.$$

où

$$i = 1, 2, \dots, (p-1),$$

les lettres k_{ij} et h_i désignant des nombres entiers. Dans cette hypothèse, les périodes relatives à x_p se réduisent à deux; et la fonction Θ définie par l'équation (1) peut être exprimée à l'aide de fonctions Θ de $(p-1)$ variables et de fonctions θ d'une variable.

Pour le montrer, remarquons d'abord que le déterminant des $(p-1)^2$ nombres entiers

$$k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{i, p-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

ne peut pas être nul. En effet, si ce déterminant était nul, on pourrait, en multipliant les deux membres des équations (2) par des entiers convenables et ajoutant, éliminer $a_{p1}, \dots, a_{p,p-1}$ et obtenir une relation de la forme

$$N a_{pp} = N' \pi \sqrt{-1},$$

N et N' étant entiers. Mais, comme la partie réelle de a_{pp} est négative et ne peut pas être nulle, on aurait nécessairement $N = 0$, $N' = 0$, et, par suite, les relations (2) ne seraient pas distinctes; ce qui est contre l'hypothèse.

Le déterminant des coefficients de $a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{p,p-1}$, dans les équations (2), n'étant pas nul, on peut résoudre ces équations par rapport à ces quantités, et l'on en tirera des expressions de la forme

$$(3) \quad k'_i a_{pi} = k''_i a_{pp} + l_i \pi \sqrt{-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

k'_i, k''_i, l_i étant des entiers; certains des nombres k''_i et l_i peuvent être nuls. Je suppose, pour plus de généralité, que $k''_1, k''_2, \dots, k''_\nu$ soient nuls, $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \dots, k''_{p-1}$ étant différents de zéro; en multipliant les deux membres des équations (3) par des entiers convenables, on pourra faire en sorte que les coefficients de a_{pp} dans les $p - \nu - 1$ dernières des équations (3) deviennent égaux au plus petit commun multiple de $k''_{\nu+1}, k''_{\nu+2}, \dots, k''_{p-1}$. Ces relations (3) peuvent alors s'écrire

$$(4) \quad \begin{cases} n_i a_{pi} = q_i \pi \sqrt{-1}, & (i = 1, 2, \dots, \nu), \\ n_{\nu+j} a_{p,\nu+j} = n_p a_{pp} + q_{\nu+j} \pi \sqrt{-1}, & (j = 1, 2, \dots, p - \nu - 1). \end{cases}$$

Dans ces relations (4), on peut toujours supposer les entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ positifs; pour les ν nombres n_i la chose est évidente, car on peut évidemment changer les signes des deux membres des ν premières équations; quant aux $(p - \nu - 1)$ nombres $n_{\nu+j}$, on remarquera d'abord que l'on peut ramener les parties réelles des périodes $a_{p,\nu+j}$ à être négatives, car l'on peut, dans la fonction (1), changer le signe de $a_{p,\nu+j}$ à condition de changer en même temps le signe de toutes les autres périodes dont *un seul* des indices est $(\nu + j)$ et celui de $x_{\nu+j}$; cela revient en effet à changer $m_{\nu+j}$ en $-m_{\nu+j}$. Les parties réelles des périodes $a_{p,\nu+j}$

étant ainsi ramenées à être négatives comme la partie réelle de α_{pp} , les entiers $n_{\nu+j}$ et n_p sont de même signe, et, comme on peut changer les signes des deux membres des équations (4), on peut faire en sorte que les entiers $n_{\nu+j}$ et n_p soient positifs.

Cela posé, faisons

$$(5) \quad m_\rho = n_\rho \mu_\rho + t_\rho, \quad (0 \leq t_\rho \leq n_\rho - 1), \quad (\rho = 1, 2, \dots, p),$$

μ_ρ et t_ρ désignant des entiers dont l'un est le quotient et l'autre le reste de la division de m_ρ par n_ρ .

On obtient toutes les valeurs de m_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et seulement une fois chacune de ces valeurs en faisant, dans (5), varier μ_ρ de $-\infty$ à $+\infty$ et t_ρ de 0 à $n_\rho - 1$.

L'on a, d'après cela, pour la fonction (1), l'expression

$$(6) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{+\infty} e^{(n_1 \mu_1 + t_1)x_1 + \dots + (n_p \mu_p + t_p)x_p + \varphi(n_1 \mu_1 + t_1, \dots, n_p \mu_p + t_p)}.$$

Posons

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \alpha_\rho = n_\rho x_\rho + n_\rho \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_\rho} \quad (\rho = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'expression (6) de la fonction Θ considérée devient

$$(8) \quad \sum_{t_\rho=0}^{t_\rho=n_\rho-1} \sum_{\mu_\rho=-\infty}^{+\infty} e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \dots + \mu_p \alpha_p + \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p)};$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) &= \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ &+ 2n_p \mu_p (\mu_1 n_1 \alpha_{p1} + \mu_2 n_2 \alpha_{p2} + \dots + \mu_{p-1} n_{p-1} \alpha_{p,p-1}) + n_p^2 \mu_p^2 \alpha_{pp}; \end{aligned}$$

remplaçons dans le coefficient de $2n_p \mu_p$ les quantités

$$n_1 \alpha_{p1}, n_2 \alpha_{p2}, \dots, n_{p-1} \alpha_{p,p-1}$$

par leurs valeurs (4); nous avons

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) = \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0), \\ + n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_p^2 + 2\mu_p \mu_{\nu+1} + 2\mu_p \mu_{\nu+2} + \dots + 2\mu_p \mu_{p-1}) + 2M\pi\sqrt{-1}, \end{cases}$$

M étant entier; cette expression (9) peut s'écrire

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_p \mu_p) \\ &= \varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) \\ &\quad - n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1})^2 \\ &\quad + n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p)^2 + 2M\pi\sqrt{-1}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette expression (10), la partie indépendante de μ_p , à savoir :

$$\varphi(n_1 \mu_1, n_2 \mu_2, \dots, n_{p-1} \mu_{p-1}, 0) - n_p^2 \alpha_{pp} (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1})^2,$$

est une forme quadratique $\Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$ des $p-1$ variables $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$; et si l'on écrit cette forme de la façon suivante :

$$(11) \quad \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) = \sum_{i,j=0}^{i,j=p-1} A_{ij} \mu_i \mu_j, \quad (A_{ij} = A_{ji}),$$

on a

$$(11') \quad \left\{ \begin{aligned} A_{ii} &= n_i^2 a_{ii}, & \text{si } i \leq v, \\ A_{ii} &= n_i^2 a_{ii} - n_p^2 \alpha_{pp}, & \text{si } i > v, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij}, & \text{si } i \text{ ou } j \leq v, \\ A_{ij} &= n_i n_j a_{ij} - n_p^2 \alpha_{pp}, & \text{si } i \text{ et } j > v. \end{aligned} \right.$$

D'après cela, dans la somme (8), l'exposant de e peut s'écrire, en laissant de côté $2M\pi\sqrt{-1}$, qui est une période de la fonction exponentielle,

$$\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_p \alpha_p + \alpha_{pp} n_p^2 (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_p)^2 + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_v \alpha_v + \mu_{v+1} (\alpha_{v+1} + \alpha_p) + \dots \\ & + \mu_{p-1} (\alpha_{p-1} + \alpha_p) + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}) \\ & + (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_{p-1} + \mu_p) \alpha_p + \alpha_{pp} n_p^2 (\mu_{v+1} + \mu_{v+2} + \dots + \mu_p)^2. \end{aligned}$$

Cela posé, faisons dans l'expression (8) la sommation par rapport à μ_p en laissant toutes les autres quantités constantes; nous pourrions mettre en facteur, dans le terme général de cette somme, la quantité

$$(12) \quad e^{\alpha + \mu_1 \alpha_1 + \dots + \mu_{p-1} \alpha_{p-1} + \mu_p \alpha_p} + \Phi(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1})$$

et nous aurons à faire la somme

$$\sum_{\mu_p = -\infty}^{+\infty} e^{(\mu_{\nu+1} + \dots + \mu_p) \alpha_p + a_{pp} n_p^2 (\mu_{\nu+1} + \dots + \mu_p)^2},$$

somme qui n'est autre que $\theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 a_{pp})^{(1)}$; la sommation par rapport à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ donne ensuite à chercher la somme des termes tels que (12), somme qui est égale à

$$e^\alpha \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}).$$

Donc enfin

$$\begin{aligned} & \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ &= \sum_{\substack{\mu_p = n_p - 1 \\ \mu_p = 0}} e^\alpha \Theta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1} - \alpha_p, \dots, \alpha_{p-1} - \alpha_p | A_{ij}) \theta_3(\alpha_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2n_p^2 a_{pp}). \end{aligned}$$

Telle est la formule de réduction annoncée.

II. Il est un autre cas, où la fonction Θ , définie par la série (1), subit une réduction analogue : c'est le cas où les p groupes de périodes simultanées des $(p-1)$ variables $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ se réduisent à $(p-1)$ groupes distincts. Cette circonstance se présente lorsque, entre les périodes relatives à ces variables, ont lieu des relations de la forme

$$(13) \quad \begin{cases} k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_{p-1} a_{i,p-1} + k_p a_{i,p} = h_i \pi \sqrt{-1}, \\ (i = 1, 2, \dots, p-1), \end{cases}$$

$k_1, k_2, \dots, k_p, h_1, h_2, \dots, h_{p-1}$ étant des *nombres entiers*.

Il importe de remarquer que k_p ne peut pas être nul; en effet, supposons $k_p = 0$, multiplions la première des relations (13) par k_1 , la seconde par k_2 , ... la dernière par k_{p-1} , et ajoutons; nous avons

$$\varphi(k_1, k_2, \dots, k_{p-1}, 0) = M \pi \sqrt{-1},$$

M étant réel. Or cette relation est impossible, car, quelles que

(1) Je désigne par $\theta_3(z | \omega, \omega')$ la fonction θ_3 formée avec ω et ω' (Voir *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, p. 115).

soient les valeurs attribuées aux entiers $m_1, m_2, \dots, m_p$, la partie réelle de $\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p)$ est *négative* et n'est jamais *nulle*. Il n'est donc pas permis de supposer $k_p = 0$. Mais il peut arriver que certains des entiers $k_1, k_2, \dots, k_{p-1}$ soient nuls.

Je vais traiter le cas où *aucun des entiers* $k_1, k_2, \dots, k_p$ n'est égal à zéro. Ces entiers ont d'ailleurs des signes quelconques. Faisons, comme précédemment,

$$(14) \quad m_\varphi = k_\varphi \mu_\varphi + t_\varphi, \quad (\varphi = 1, 2, \dots, p),$$

μ_φ et t_φ étant deux entiers dont le second t_φ est positif et satisfait à l'une ou l'autre des conditions

$$(15) \quad \begin{cases} 0 \leq t_\varphi \leq k_\varphi - 1 & \text{si } k_\varphi > 0, \\ 0 < t_\varphi \leq -k_\varphi - 1 & \text{si } k_\varphi < 0. \end{cases}$$

L'on obtient encore toutes les valeurs de m_φ en faisant varier μ_φ de $-\infty$ à $+\infty$ et donnant à t_φ les valeurs satisfaisant aux conditions (15). La série (1) peut donc s'écrire

$$(16) \quad \sum_{t_\varphi} \sum_{\mu_\varphi = -\infty}^{\mu_\varphi = +\infty} e^{(k_1 \mu_1 + t_1)x_1 + \dots + (k_p \mu_p + t_p)x_p + \varphi(k_1 \mu_1 + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_p)}.$$

Le signe $\sum_{t_\varphi}$ indique une somme étendue aux valeurs (15) de $t_1, t_2, \dots, t_p$. Posons

$$(17) \quad \begin{cases} \beta = t_1 x_1 + \dots + t_p x_p + \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p), \\ \beta_\varphi = k_\varphi x_\varphi + k_\varphi \frac{\partial \varphi(t_1, t_2, \dots, t_p)}{\partial t_\varphi} \quad (\varphi = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

l'exposant de e , dans la somme (16), devient

$$(18) \quad \beta + \mu_1 \beta_1 + \dots + \mu_p \beta_p + \varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p).$$

Dans cet exposant, écrivons, au lieu de $\varphi(k_1 \mu_1, k_2 \mu_2, \dots, k_p \mu_p)$,

$$\begin{aligned} \varphi[k_1 \mu_p + k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2 \mu_p + k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, \\ k_{p-1} \mu_p + k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), k_p \mu_p + 0], \end{aligned}$$

et développons par la série de Taylor, en considérant

$$k_1(\mu_1 - \mu_p), \quad k_2(\mu_2 - \mu_p), \quad \dots, \quad k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), \quad 0$$

comme les accroissements des variables. Il est aisé de voir que, en

vertu des relations (13), ce développement se réduit à

$$\varphi(k_1 \mu_p, k_2 \mu_p, \dots, k_p \mu_p) + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), k_2(\mu_2 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] + 2N\pi\sqrt{-1},$$

N étant entier; en effet, le coefficient de $k_i(\mu_i - \mu_p)$, dans ce développement, est $\frac{\partial \varphi(k_1 \mu_p, k_2 \mu_p, \dots, k_p \mu_p)}{\partial(k_i \mu_p)}$, c'est-à-dire

$$2\mu_p(k_1 a_{i1} + k_2 a_{i2} + \dots + k_p a_{ip})$$

ou, d'après (13), $2\mu_p h_i \pi \sqrt{-1}$.

L'expression (18) peut donc s'écrire

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta - (\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + (\mu_2 - \mu_p)\beta_2 - \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} \\ - \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0] - \mu_p(\beta_1 + \beta_2 - \dots + \beta_p) \\ + \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p) - 2N\pi\sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

Alors, dans la somme (16), laissons d'abord μ_p constant et sommions par rapport à $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$; nous pourrions mettre en facteur dans le terme général l'expression

$$(20) \quad e^{\beta + \mu_p(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p) + \mu_p^2 \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)},$$

et la somme à évaluer sera

$$\sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_{p-1} = +\infty \\ \mu_1, \dots, \mu_{p-1} = -\infty}} e^{(\mu_1 - \mu_p)\beta_1 + \dots + (\mu_{p-1} - \mu_p)\beta_{p-1} + \varphi[k_1(\mu_1 - \mu_p), \dots, k_{p-1}(\mu_{p-1} - \mu_p), 0]},$$

c'est-à-dire une fonction Θ de $p-1$ variables

$$\Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j') \quad \left(\begin{array}{l} i' = 1, 2, \dots, p-1 \\ j' = 1, 2, \dots, p-1 \end{array} \right).$$

Si ensuite nous faisons la sommation par rapport à μ_p , nous avons à évaluer la somme des expressions (20), μ_p variant de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui donne

$$e^{\beta} \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)].$$

Donc enfin, d'après la formule (16),

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ = \sum_{I_2} e^{\beta} \Theta(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1} | k_i' k_j' a_i' j') \\ \quad \times \theta_3[\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)]; \end{array} \right.$$

ce qui donne l'expression cherchée.

Il est à remarquer que $2\varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)$ se réduit, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, à

$$k_p \frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_p},$$

car les relations (13) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial \varphi(k_1, k_2, \dots, k_p)}{\partial k_i} = 2h_i \pi \sqrt{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1).$$

III. Une méthode analogue s'applique au cas où, dans les relations (13), certains des entiers $k_1, k_2, \dots, k_p$ sont nuls. Si l'on suppose

$$k_1 = k_2 = \dots = k_\nu = 0,$$

$k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \dots, k_p$ étant différents de zéro, il faudra poser

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \mu_\lambda & (\lambda = 1, 2, \dots, \nu), \\ m_{\nu+\varphi} &= k_{\nu+\varphi} \mu_{\nu+\varphi} + t_\varphi & (\varphi = 1, 2, \dots, p-\nu), \end{aligned}$$

les entiers t_φ étant assujettis à la condition

$$(22) \quad \begin{cases} 0 \leq t_\varphi < k_{\nu+\varphi} - 1 & \text{si } k_{\nu+\varphi} > 0, \\ 0 \leq t_\varphi < k_{\nu+\varphi} - 1 & \text{si } k_{\nu+\varphi} < 0. \end{cases}$$

La fonction $\Theta(1)$ peut alors s'écrire

$$(23) \quad \sum_{t_\varphi} \sum_{\mu_i = -\infty}^{+\infty} e^{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_\nu x_\nu + (\mu_{\nu+1} k_{\nu+1} + t_1) x_{\nu+1} + \dots + (\mu_p k_p + t_{p-\nu}) x_p + \varphi(\mu_1, \dots, \mu_\nu, k_{\nu+1} \mu_{\nu+1} + t_1, \dots, k_p \mu_p + t_{p-\nu})}$$

le signe $\sum_{t_\varphi}$ indiquant une sommation faite par rapport à $t_1, t_2, \dots$

$t_{p-\nu}$ et étendue aux valeurs (22).

Si l'on pose

$$\alpha'_1 = t_1 x_{\nu+1} - t_2 x_{\nu+2} + \dots + t_{p-\nu} x_p + \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-\nu}),$$

$$\alpha'_{1,\lambda} = x_\lambda + 2(a_{\lambda,\nu+1} t_1 + a_{\lambda,\nu+2} t_2 + \dots + a_{\lambda,p} t_{p-\nu}), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \nu),$$

$$\alpha'_{\nu+\varphi} = k_{\nu+\varphi} x_{\nu+\varphi} + h_{\nu+\varphi} \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, 0, t_1, \dots, t_{p-\nu})}{\partial t_\varphi}, \quad (\varphi = 1, 2, \dots, p-\nu),$$

$$\Theta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1}) = \sum_{m_1, \dots, m_{p-1} = -\infty}^{m_1, \dots, m_{p-1} = +\infty} e^{m_1 \xi_1 + \dots + m_{p-1} \xi_{p-1} + \varphi(m_1, \dots, m_\nu, k_{\nu+1} m_{\nu+1} + 1, \dots, k_{p-1} m_{p-1} + 0)},$$

l'on obtient, comme précédemment, la formule de réduction

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta(x_1, x_2, \dots, x_p | a_{ij}) \\ = \sum_{l_p} e^{\gamma \Theta'(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-1})} \\ \times \theta_3[\gamma_{v+1} + \gamma_{v+2} + \dots + \gamma_p | 2\pi\sqrt{-1}, 2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, \dots, k_p)]. \end{array} \right.$$

Ici encore l'on a, en négligeant un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$,

$$2\varphi(0, 0, \dots, 0, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p) \equiv k_p \frac{\partial \varphi(0, 0, \dots, k_{v+1}, k_{v+2}, \dots, k_p)}{\partial k_p}.$$

Sur une série d'Abel; par M. HALPHEN.

(Séance du 16 décembre 1881.)

Dans le Tome II des *Œuvres d'Abel*, comprenant les *Mémoires* que l'illustre géomètre n'avait pas publiés lui-même, se trouve (page 82 de la 1^{re} édition, 73 de la 2^e) une série très remarquable dont l'étude n'a pas encore été faite d'une manière satisfaisante. C'est cette étude que j'ai entreprise et que l'on trouvera dans le présent Mémoire.

1. Considérons la suite indéfinie des polynômes $P_0, P_1(x), P_2(x), \dots$, que voici :

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{x(x - 2\beta)}{2}, \quad \dots, \quad P_n(x) = \frac{x(x - n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n},$$

où β est une constante quelconque. Les degrés de ces polynômes successifs reproduisent la suite des nombres naturels. Il est donc évident que tout polynôme entier pourra être développé suivant les polynômes P , en cette sorte :

$$(1) \quad \varphi(x) = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \dots + \mu_n P_n(x).$$

Les coefficients μ seront indépendants de x , et l'indice n , celui du dernier terme, sera le degré de $\varphi(x)$.

Pour trouver les coefficients μ , observons deux propriétés des polynômes P : 1^o ils s'évanouissent tous, sauf P_0 , pour $x = 0$;

2° ils vérifient la relation

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = P_{n-1}(x - \beta),$$

et, par suite, aussi la relation plus générale

$$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = P_{n-m}(x - m\beta).$$

En dérivant m fois l'identité (1), on obtient donc

$$\varphi^m(x) = \mu_m P_0 - \mu_{m+1} P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2} P_2(x - m\beta) - \dots$$

Preuant enfin $x = m\beta$, on a

$$\mu_m = \varphi^{(m)}(m\beta).$$

Donc, tout polynôme entier $\varphi(x)$ peut être mis sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta) + \dots \\ &\quad + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n}\varphi^{(n)}(n\beta) + \dots \end{aligned} \right.$$

dans laquelle β est une quantité arbitraire.

Cette formule (2) est celle d'Abel. Le problème que je me propose ici est d'étudier sous quelles conditions la série (2), formée avec une fonction quelconque, et indéfiniment prolongée, représente effectivement cette fonction.

Voici comment je procéderai. Je prendrai la série générale

$$(3) \quad F(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 \frac{x(x-2\beta)}{2} + \dots + \mu_n \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n} + \dots,$$

où les coefficients μ seront indépendants de x , et d'ailleurs quelconques, assujettis seulement à rendre la série convergente. J'étudierai la fonction $F(x)$ ainsi définie, et je montrerai que cette fonction a plusieurs propriétés caractéristiques. De là découlent des conditions nécessaires pour qu'une fonction $\varphi(x)$ puisse vérifier la formule (2). Je prouverai ensuite que ces mêmes conditions sont aussi suffisantes, et le problème se trouvera résolu.

2. Considérons le terme de rang $(n+1)$ dans la série (3), et

écrivons-le ainsi

$$(4) \quad T_n = (-1)^{n-1} \frac{x(n\beta)^{n-1} \left(1 - \frac{x}{n\beta}\right)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \mu_n.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{\beta} = \xi.$$

La quantité T_n , pour n infiniment grand, a, d'après la formule de Stirling, l'expression asymptotique

$$(5) \quad T_n = \frac{(-1)^{n-1} \xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(e\beta)^n \mu_n}{n^{\frac{3}{2}}},$$

d'où je tire cette première conclusion : *Pour que les termes de la série (3) convergent vers zéro, il faut et il suffit que l'on ait*

$$(6) \quad \mu_n = (-1)^{n-1} n^{\frac{3}{2}} (e\beta)^{-n} u_n,$$

u_n étant infiniment petit avec $\frac{1}{n}$.

C'est là une première condition nécessaire, mais non suffisante, à la convergence de la série (3).

Si la série dont le terme général est u_n est absolument convergente, aucune condition ultérieure n'est plus nécessaire à la convergence de la série (3). D'ailleurs u_n est indépendant de x . Donc, dans un tel cas, la série (3) définit la fonction $F(x)$ pour toute valeur de x . Cette fonction est finie et uniforme dans tout le plan.

Je vais étendre ce résultat aux autres cas. Pour y parvenir, je prendrai une expression asymptotique de T_n , plus approchée que l'expression (5).

3. Développant $\left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1}$ suivant les puissances décroissantes de n , j'ai d'abord

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^{n-1} &= e^{-\xi} \left[1 + \frac{1}{n} \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) + \frac{c_n}{n^2} \right], \\ (\lim c_n)_{n \rightarrow \infty} &= \frac{1}{8} \xi^3 - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{\xi^2}{2}. \end{aligned} \right.$$

J'obtiens de même, par la formule de Stirling,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{-(n+\frac{1}{2})} e^n \left(1 - \frac{1}{12n} + \frac{c'_n}{n^2} \right), \\ (\lim c'_n)_{n=\infty} &= \frac{1}{288}. \end{aligned} \right.$$

De ces deux formules, je conclus, en tenant compte de (6),

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{\xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \left[u_n + \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \right) \frac{u_n}{n} + b_n \frac{u_n}{n^2} \right], \\ (\lim b_n)_{n=\infty} &= \frac{1}{8} \xi^4 - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{25}{24} \xi^2 - \frac{1}{12} \xi + \frac{1}{288}. \end{aligned}$$

Dès que u_n est supposé infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, la série, dont le terme général est $\frac{b_n u_n}{n^2}$, est absolument convergente. La série (3) converge ou diverge en même temps que la série s , dont le terme général est

$$s_n = u_n + \left(\xi - \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{12} \right) \frac{u_n}{n}.$$

Si maintenant la série (3) converge, non plus pour une valeur particulière de x , mais pour une suite de valeurs attribuées à cette variable, la convergence séparée des deux séries, ayant pour termes généraux respectivement u_n et $\frac{u_n}{n}$, est nécessaire. Elle est d'ailleurs suffisante. Cette condition même se présente si l'on exige simplement que la série (3) converge pour deux valeurs différentes attribuées à x , pourvu que la somme de ces valeurs ne soit pas 2β . Mais c'est là un détail sans importance.

D'après un théorème d'Abel, la série dont le terme général est $\frac{u_n}{n}$ converge dès que celle dont le terme général est u_n est convergente. Je fais allusion ici au théorème III du Mémoire sur la série du binôme ⁽¹⁾ (t. I, p. 69 des *Œuvres complètes*, p. 222 de la 2^e édition). J'ai donc, en conclusion :

La condition nécessaire et suffisante à la convergence de la

⁽¹⁾ Cette application du théorème d'Abel m'a été indiquée par M. Jordan.

série (3), pour x variable, consiste dans la convergence de la série, indépendante de x , qui a pour terme général

$$u_n = (-1)^{n-1} (e\beta)^n n^{-\frac{3}{2}} \mu_n.$$

Cette condition satisfaite, la série (3) représente une fonction synectique dans tout le plan.

Je dis *synectique*, quoique la démonstration établisse simplement que $F(x)$ est finie et uniforme. Mais il est très aisé de démontrer encore que la série (3) peut être différenciée; il n'est pas besoin de s'y arrêter.

4. De la définition (3) résulte, pour la fonction $F(x)$, la même conclusion qui a été tirée de (1) pour un polynôme entier,

$$(9) \quad \begin{cases} F^{(m)}(x) = \mu_m + \mu_{m+1} P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2} P_2(x - m\beta) + \dots \\ F^{(m)}(m\beta) = \mu_m. \end{cases}$$

Il n'est donc pas douteux que la série (3) n'est pas plus générale que la série d'Abel, formée avec une fonction quelconque. Il faut toutefois observer que la fonction $F(x)$, définie par la série (3), où les coefficients μ peuvent être liés à β d'une manière quelconque n'est généralement pas indépendante de β .

C'est de l'égalité (9) que je vais tirer les propriétés caractéristiques de la fonction $F(x)$. Je ferai croître au delà de toute limite l'indice de dérivation m , et, en même temps, je supposerai x de la forme suivante :

$$(10) \quad x = (\tau + p)\beta,$$

τ désignant une quantité quelconque invariable avec m , et p un nombre positif, variant avec m d'une manière arbitraire, mais ne dépassant pas m .

Si, pour m infini, $(m - p)$ reste fini, les propriétés de $F^{(m)}(x)$ se déduisent immédiatement de l'analyse qui précède. En désignant maintenant par ξ la quantité finie $\frac{x - m\beta}{\beta}$, je pourrai employer les mêmes formules qu'au numéro précédent.

Posant

$$v_n = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{n} \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{12}\right) + \frac{b_n}{n^2}\right] u_{m+n}, \quad \xi = \frac{x - m\beta}{\beta}.$$

et désignant par T_n le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme du développement (9), j'obtiens

$$m^{-\frac{3}{2}} e^m \mathcal{G}^m T_n = (-1)^m \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} v_n.$$

Suivant les hypothèses, la série $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ converge vers zéro avec $\frac{1}{m}$. J'ai donc le résultat suivant, où je mets la lettre y au lieu de $\gamma_1 \mathcal{G}$:

Quand m est infiniment grand et que y reste fini, le produit $m^{-\frac{3}{2}} e^m \mathcal{G}^m F^{(m)}(y + m \mathcal{G})$ converge vers zéro.

§. Je vais maintenant généraliser ce résultat en envisageant pour x une valeur quelconque de la forme (10), dans laquelle on devra supposer $(m - p)$ infini avec m .

Pour la démonstration, je suppose γ_1 réel, et je ferai disparaître cette restriction *a posteriori*.

D'après les hypothèses, $\left(\frac{x - m \mathcal{G}}{\mathcal{G}}\right)$ est réel et négatif pour m suffisamment grand.

J'écris maintenant le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme T_n de (9) en me servant toujours des formules (6) et (8), mais sans faire usage de la formule (7). Posant

$$w_n = \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12n} - \frac{e'_n}{n^2}\right) u_{m+n},$$

j'obtiens le résultat suivant :

$$(11) \quad m^{-\frac{3}{2}} e^p \mathcal{G}^m T_n = \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{p-m} \frac{m - \gamma_1 - p}{m} \left(1 - \frac{m - \gamma_1 - p}{n}\right)^{n-1} w_n.$$

Dans le second membre de cette formule (11), abstraction faite des trois premiers facteurs, indépendants de n , nous multiplions w_n par la fonction $\left(1 - \frac{m - \gamma_1 - p}{n}\right)^{n-1}$, qui est toujours croissante avec n . C'est ce qui résulte de la supposition $(m - \gamma_1 - p) > 0$. La limite de la série se trouve alors au moyen du théorème d'Abel cité précédemment, et auquel on fait une modification insignifiante. Voici ce théorème modifié comme il convient ici :

En désignant par $w_1, w_2, \dots, w_n$ une série de quantités quel-

conques, et supposant $p_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ de module toujours moindre qu'une quantité déterminée δ , quel que soit n , on aura

$$\text{mod.}(\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \dots + \varepsilon_n w_n) < \delta \varepsilon_1 + (p_n - \delta) \varepsilon_n,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ étant des quantités positives croissantes.

Appliquant ici cette proposition, en prenant pour w_n les quantités précédentes, et pour ε_n cette autre :

$$\varepsilon_n = e^{p-m} \left(1 + \frac{m - \tau_1 - p}{n} \right)^{n-1},$$

nous aurons pour δ et pour p_n des quantités infiniment petites avec $\frac{1}{m}$; pour ε_1 , la quantité infiniment petite e^{p-m} ; quant à ε_n , son maximum a lieu pour n infini; c'est une quantité finie $e^{-\tau_1}$.

La somme est donc infiniment petite, et j'ai ce résultat :

Quand m est infiniment grand et que γ reste fini, le produit $m^{-\frac{5}{2}} e^p \beta^m F^{(m)}(\gamma + p\beta)$ converge vers zéro, p étant un nombre positif variant arbitrairement avec m , mais ne surpassant pas m .

Comme je l'ai fait observer, cette proposition n'est encore établie que pour le cas où $\gamma : \beta$ est réel. Faisons maintenant disparaître cette restriction.

6. Posons, pour un instant,

$$e^p F(\gamma - p\beta) = f(\gamma).$$

La fonction $f(\gamma)$ est synectique dans tout le plan ($n^\circ 3$); je peux donc appliquer la série de Taylor, quels que soient γ et h :

$$f^{(m)}(\gamma - h) = f^{(m)}(\gamma) - \frac{h}{1} f^{(m+1)}(\gamma) + \frac{h^2}{1.2} f^{(m+2)}(\gamma) - \dots$$

Soit β_1 une quantité de module moindre que β . D'après la dernière proposition, j'ai

$$\beta_1^{m+n} f^{(m+n)}(\gamma) = \omega_n,$$

où ω_n est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. Employant ces quantités ω_n , je

transforme ainsi l'expression de $f^{(m)}(y + h)$,

$$\beta_1^m f^{(m)}(y + h) = \omega_0 + \frac{h}{\beta_1} \omega_1 + \frac{1}{1.2} \left(\frac{h}{\beta_1}\right)^2 \omega_2 + \dots + \frac{1}{1.2 \dots n} \left(\frac{h}{\beta_1}\right)^n \omega_n + \dots,$$

et il devient évident que, h étant une quantité finie quelconque, $\beta_1^m f^{(m)}(y + h)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. La proposition s'offre donc en toute généralité sous cette forme :

m étant infiniment grand, p étant positif, moindre que m et d'ailleurs quelconque, y étant une quantité fixe réelle ou imaginaire, et β_1 ayant un module inférieur à celui de β , le produit $e^p \beta_1^m F^{(m)}(y + p\beta_1)$ converge vers zéro; c'est le terme général d'une série absolument convergente.

Je vais encore la transformer; à cet effet, je suppose β_1 de même argument que β , et je considère le produit $e^{p_1} \beta_1^m F^{(m)}(y + p_1 \beta_1)$, dans lequel p_1 est supposé, comme précédemment p , un nombre positif quelconque, ayant m pour limite supérieure. Je pose $p_1 \beta_1 = p\beta$. D'après les hypothèses, p sera un nombre satisfaisant encore à ces mêmes conditions.

Je dis qu'on a

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1 - p} < 1.$$

Soit, en effet, $\frac{\beta_1}{\beta} = 1 - \lambda$, d'où résulte $p_1 - p = p_1 \lambda$; on aura

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1 - p} = \left[(1 - \lambda) e^{\frac{p_1 \lambda}{m}}\right]^m,$$

La fraction $\frac{p_1}{m}$ étant positive et plus petite que l'unité, j'ai

$$e^{\frac{p_1 \lambda}{m}} < 1 + \frac{p_1 \lambda}{m} < 1 + \lambda.$$

Par suite

$$(1 - \lambda) e^{\frac{p_1 \lambda}{m}} < 1,$$

ce qu'il fallait prouver. J'ai en conséquence

$$e^{p_1} \beta_1^m F^{(m)}(y + p_1 \beta_1) < \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1 - p} e^{p_1} \beta_1^m F^{(m)}(y + p_1 \beta_1) < e^{p_1} \beta_1^m F^{(m)}(y + p_1 \beta_1).$$

ces relations étant entendues s'appliquer aux modules des quantités envisagées. Je peux donc énoncer le résultat sous cette forme, qui est définitive.

La fonction $F(x)$, définie par la série (3), jouit de la propriété suivante :

Soit z une quantité quelconque de même argument que β et de module moindre que celui de β , soit p un nombre positif variant avec m d'une manière arbitraire, sans dépasser m , et soit enfin γ une quantité arbitraire, mais fixe; le produit $z^m e^p F^{(m)}(\gamma + pz)$ converge vers zéro avec $\frac{1}{m}$. C'est le terme général d'une série absolument convergente.

7. J'en ai fini maintenant avec l'étude des propriétés qui résultent de la définition d'une fonction par la série (3), et j'arrive à la solution du problème proposé. Mais d'abord je fais deux remarques concernant toute fonction F jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée.

Formons la série d'Abel avec cette fonction F et en prenant z au lieu de β pour construire la série. Nous obtenons ainsi

$$(12) \quad \mathcal{F}(x, z) = F(0) + \frac{x}{1} F'(z) + \dots + \frac{x(x - mz)^{m-1}}{1.2\dots m} F^{(m)}(mz) + \dots$$

Cette série converge, comme il résulte de la règle énoncée à la fin du n° 3; car on a

$$u_m = (-1)^{m-1} (ez)^{m-\frac{3}{2}} F^{(m)}(mz).$$

D'après la proposition ci-dessus, où l'on suppose $\gamma = 0$, $p = m$, u_m est le terme général d'une série convergente.

La fonction $\mathcal{F}(x, z)$ est donc définie par la série (12) pour toute valeur de x , et pour les valeurs de z dont l'argument est celui de β , et le module moindre. Quant aux valeurs de z dont l'argument diffère de celui de β , on ne sait, jusqu'à présent, si, pour ces valeurs, la série (12) converge.

La seconde remarque se rapporte à la conséquence obtenue en supposant $p = 0$; et je peux l'énoncer ainsi :

THÉORÈME I. — *Pour que la série d'Abel puisse être appli-*

quée à une fonction $f(x)$, il faut qu'il existe des constantes α laissant le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$ fini, pour m infini.

8. Rien n'est plus aisé que de concevoir, de la manière la plus générale, une fonction $f(x)$ jouissant de cette dernière propriété, et de caractériser le maximum a du module des constantes α . Que l'on prenne une série procédant suivant les puissances croissantes de x , et dont le cercle de convergence ait le rayon a , et soit

$$\psi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_m x^m + \dots$$

cette série. En posant

$$f(x) = c_0 + c_1 \frac{x}{1} + c_2 \frac{x^2}{1.2} + c_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \dots + c_m \frac{x^m}{1.2\dots m} + \dots,$$

on aura la fonction demandée $f(x)$. On peut encore figurer sa liaison avec $\psi(x)$ de cette manière,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \psi(z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé, embrassant l'origine, et de rayon maximum moindre que a . Les deux fonctions f et ψ jouent ainsi, l'une par rapport à l'autre, le rôle de *génératrice et de déterminante* au sens qu'Abel donne à ces mots dans le Mémoire où se trouve la série dont je m'occupe ici. Mais je ne ferai pas usage de cette notion.

Si la série $\psi(x)$ est convergente dans tout le plan, la constante a dépasse toute limite. On a alors une classe de fonctions $f(x)$, parmi lesquelles se rangent les fonctions de Bessel, dont on a l'exemple le plus simple en prenant $\psi(x) = e^x$. La fonction $\cos\sqrt{x}$ appartient aussi à cette classe, et de même $\sqrt{x} \sin\sqrt{x}$.

La fonction $e^{\frac{x}{a}}$ est le type le plus simple des fonctions $f(x)$ qui correspondent à la constante a , ou mieux $e^{\frac{x}{a}}$, a ayant le module a et un argument quelconque.

9. Prenons une fonction $f(x)$ répondant à la constante a . Soit z_1 une quantité, d'argument quelconque et de module inférieur à a . Quel que soit x , le produit $z_1^m f^{(m)}(x)$ a pour limite zéro. Les

termes du développement de $f(x)$ par la série de Maclaurin sont infiniment petits par rapport aux termes correspondants du développement de $e^{\frac{x}{a_1}}$. Il en est de même pour les dérivées d'ordre quelconque de ces fonctions, en sorte qu'en désignant par ε un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente, on a

$$f^{(m)}(x) = \frac{\varepsilon}{a_1^m} e^{\frac{x}{a_1}}.$$

Cette conséquence a lieu, même si x varie, en sorte que, mettant mz au lieu de x , j'ai

$$(13) \quad f^{(m)}(mz) = \varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{a_1} \right)^m.$$

Considérons maintenant l'équation transcendante

$$(14) \quad ue^{1+u} = 1,$$

qui a une racine positive et une seule, égale environ à 0,27. et que nous désignerons par u .

Choisissons pour z une quantité, ayant le même argument que a_1 , et astreinte à la condition

$$\frac{z}{a_1} \leq u.$$

Comme u est racine de (14), il en résulte

$$\frac{z}{a_1} e^{\frac{z}{a_1}} \leq \frac{1}{e},$$

et, à cause de (13),

$$(15) \quad f^{(m)}(mz) = \varepsilon' (e z)^{-m},$$

ε' étant comme ε , un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $f(x)$ étant une fonction quelconque satisfaisant à la condition que $a^m f^{(m)}(x)$ ne devienne pas infini avec m , cette fonction, comme on le voit, satisfait en même temps à la condition (15), pourvu qu'on prenne pour z une quantité d'argument quelconque, et de module moindre que ua .

La condition (15) est précisément celle qui permet de déduire de $f(x)$ une fonction $\tilde{f}(x, z)$, comme on l'a fait pour $F(x)$. au

moyen de la formule (12). En prenant donc

$$(16) \quad \tilde{f}(x, z) = f(0) + \frac{x}{1} f'(z) + \dots + \frac{x(x - mz)^{m-1}}{1.2 \dots m} f^{(m)}(mz) \dots,$$

je définis $\tilde{f}(x, z)$, fonction synectique de x dans tout le plan, et synectique aussi par rapport à z pour les valeurs dont le module est moindre que ua .

Pour ces valeurs de z , il est permis de développer $\tilde{f}(x, z)$ au moyen de la série de Maclaurin, étendue au cas de deux variables. Si l'on veut former les termes de ce développement jusqu'à l'ordre quelconque n , on obtiendra, pour ces termes, la même forme analytique que si $f(x)$ était un polynôme entier de degré au moins égal à n . Or, si $f(x)$ est un polynôme entier, $\tilde{f}(x, z)$ se réduit à $f(x)$ (n° 1). Donc, si loin qu'on pousse le développement, on le voit toujours coïncider avec celui de $f(x)$. Donc, pour les valeurs de z envisagées, on a $\tilde{f}(x, z) = f(x)$. De là cette première conclusion énonçant des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires.

II. Soit a le plus grand module des quantités z , laissant fini $z^m f^{(m)}(x)$ pour m infini; soit u la racine positive de l'équation $ue^{1+u} = 1$; la série d'Abel représente $f(x)$ quand le module de z est moindre que ua .

Et, en particulier, à une fonction $f(x)$, pour laquelle la constante, désignée par a , dépasse toute limite, la série d'Abel s'applique, quelle que soit la constante φ .

10. La condition (15), nécessaire à l'existence de la série (16), est satisfaite, comme je viens de le prouver pour les valeurs de z , de module moindre que ua et d'argument quelconque. Mais il arrivera généralement que, si l'on donne à z un argument déterminé ω , la condition (15) soit encore satisfaite pour des valeurs de z de module supérieur à ua . Soit φ la limite de ces modules. $\tilde{f}(x, z)$ est alors une fonction de z , continue ainsi que toutes ses dérivées, pour les valeurs de z , d'argument ω et de module moindre que φ . Tant que le module de z ne dépasse pas ua , elle coïncide avec $f(x)$. Donc elle coïncide avec $f(x)$ jusqu'à la limite φ du module de z . De là une condition suffisante pour que la série d'Abel représente

$f(x)$, condition qui coïncide avec celle qu'à la fin du n° 6 on a reconnue nécessaire.

III. Les notations étant les mêmes que dans l'énoncé II, le produit $(ez)^m f^{(m)}(mz)$ reste fini, pour m infini, tant que le module de z reste inférieur à ua . Mais si z conserve un même argument ω , et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua , le produit $z^m f^{(m)}(mz)$ reste encore fini jusqu'à une autre limite du module de z . Soit $\varphi(\omega)$ cette limite, dont la forme dépend de la fonction $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série d'Abel s'applique à $f(x)$ consiste en ce que le point affixe de β soit situé à l'intérieur de la courbe $\varphi = \varphi(\omega)$: ou, en d'autres termes, que si l'on donne à β l'argument ω , le module de β soit moindre que $\varphi(\omega)$.

11. L'exemple qu'il est naturel de prendre en premier lieu est celui qui se rapporte à la fonction exponentielle. Soit donc $f(x) = e^x$. Le nombre a est alors l'unité. Si l'on pose

$$z = \varphi (\cos \omega + i \sin \omega),$$

on a

$$\text{mod}(ez)^m f^{(m)}(mz) = (\varphi e^{1+\varphi \cos \omega})^m.$$

Par conséquent, la courbe qui limite les positions du point β a pour équation

$$(17) \quad \varphi e^{1+\varphi \cos \omega} = 1.$$

Elle se compose : 1° de deux branches infinies se croisant au point dont les coordonnées sont $\varphi = 1$, $\omega = \pi$; 2° d'une boucle convexe, partant de ce dernier point, où son rayon vecteur est maximum, entourant l'origine et ayant, pour rayon minimum, $\varphi = u$, répondant à $\omega = 0$. C'est à l'intérieur de cette boucle convexe que doit se trouver le point β . Cette condition s'exprime par les deux inégalités *simultanées*

$$\text{mod } \beta < 1, \quad \text{mod } \beta e^{1+\beta} < 1.$$

12. Cet exemple acquiert plus d'intérêt si l'on prend $f(x) = e^{\lambda x}$, λ étant une quantité complexe quelconque. La condition consiste

alors en ce que le point affixe de $\lambda\beta$ soit à l'intérieur de la boucle convexe de la courbe (17). Sous la forme analytique, la condition est exprimée par les inégalités *simultanées*

$$(18) \quad \text{mod } \lambda\beta < 1, \quad \text{mod } \lambda\beta e^{1+\lambda\beta} < 1.$$

Voici maintenant ce qui fait l'intérêt de cet exemple. En premier lieu, la série correspondant à ce cas

$$(19) \quad e^{\lambda x} = 1 + \lambda x e^{\lambda\beta} + \dots + \frac{x(x - n\beta)^{n-1}}{1.2\dots n} (\lambda e^{\lambda\beta})^n \dots$$

est précisément celle qui sert de point de départ à Abel pour trouver la série générale dont il s'agit dans ce Mémoire. Abel emprunte cette série particulière à Legendre, mais sans rechercher les conditions sous lesquelles la formule (19) est exacte.

En second lieu, la formule (19) est un exemple classique de la série de Bürmann. Si l'on envisage $e^{\lambda x}$ comme une fonction de $\lambda e^{\lambda\beta}$ par l'intermédiaire de la variable λ , β et x étant considérés comme des constantes, elle donne, en effet, le développement de $e^{\lambda x}$ suivant les puissances croissantes de $\lambda e^{\lambda\beta}$. Si l'on se place à ce point de vue, on pourra chercher directement les conditions d'exactitude de la formule (19). A cet effet, posant

$$(20) \quad \lambda\beta e^{\lambda\beta} = \xi,$$

on devra examiner quel est le rayon maximum du cercle concentrique à l'origine, à l'intérieur duquel on peut faire décrire à ξ un contour fermé quelconque, de telle sorte qu'une racine λ de l'équation (20) se reproduise, après que ce contour aura été parcouru. On devra aussi chercher quelle est cette racine.

La première question se résout immédiatement par le moyen du développement (19), dont la convergence exige la seconde des conditions (18), c'est-à-dire

$$\text{mod } \xi \leq \frac{1}{e}.$$

Il reste à examiner la seconde question qui, en d'autres termes, peut se poser ainsi : ξ ayant son module inférieur à $\frac{1}{e}$, la série

$$1 + \frac{x}{\beta} \xi + \dots + \frac{x(x - n\beta)^{n-1}}{1.2\dots n\beta^n} \xi^n + \dots$$

converge et représente $e^{\lambda x}$, λ étant une racine de l'équation (20). On demande quelle est cette racine.

La solution directe de cette question par l'étude de l'équation (20) n'offre pas de difficulté sérieuse; elle devient inutile, grâce à la théorie que j'ai développée ici, et qui fournit la réponse suivante : *la racine demandée est la seule qui assigne à $\lambda\beta$ un module moindre que l'unité*. C'est ce que nous apprend la première condition (18) (1).

13. Par l'exemple qui vient d'être examiné, on voit que la série d'Abel peut converger sans représenter la fonction qui sert à la construire. C'est ce qui arrive quand on choisit $\lambda\beta$ de manière que la seconde des conditions (18) soit satisfaite, mais non la première. On peut obtenir encore la même circonstance en ajoutant, à une fonction qui se représente par la série, une fonction qui donne zéro pour chaque terme de la série. C'est ce qui a lieu si l'on prend

$$f(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\beta},$$

k étant un nombre entier. On a effectivement

$$f^{(m)}(m\beta) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2\beta} \right]^m \sin \left[\frac{(2k+1)m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2} \right] = 0.$$

Ainsi, généralement, la fonction

$$A_0 \sin \frac{\pi x}{2\beta} + A_1 \sin \frac{3\pi x}{2\beta} + A_2 \sin \frac{5\pi x}{2\beta} + \dots,$$

formée de termes analogues, *en nombre limité*, ne peut être re-

(1) L'excellent *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch contient au sujet de cette série particulière, une inexactitude. Je crois la rectification d'autant plus utile que cet ouvrage est plus répandu et apprécié.

Dans le t. II, p. 105 (3^e édition), pour l'existence du développement

$$e^{az} = 1 + \frac{a}{1} z e^{-z} + \frac{a(a+2)}{1.2} z^2 e^{-2z} + \dots,$$

le savant auteur énonce que la condition, pour z réel, est $0 \leq z < 1$. Cette formule est un cas de (19), obtenu en mettant a, z au lieu de x, λ , et faisant $\beta = -1$. Les conditions sont donc $\text{mod } z < 1$, $\text{mod } ze^{1-z} < 1$, et, pour z réel, $-u < z < 1$, u étant la transcendante numérique indiquée au n^o 9.

présentée par la série d'Abel, relative à la constante β , car la série a tous ses termes nuls.

Laissant de côté ces observations, j'arrive maintenant à l'application qui me paraît offrir le plus d'intérêt, celle de la série d'Abel à une fonction rationnelle. Je vais mettre en évidence le résultat que voici : *appliquée à une fonction rationnelle, la série d'Abel converge toujours et ne représente jamais la fonction, sauf au cas où il s'agit d'un polynôme entier.* Elle ne peut représenter la fonction, puisque cette dernière n'est pas synectique dans tout le plan.

14. Appliquant d'abord la série d'Abel à la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

j'obtiens le développement suivant :

$$F(x, z, \beta) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z-\beta)^2} + \frac{x(x-2\beta)}{(z-2\beta)^3} + \dots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{(z-n\beta)^{n+1}} + \dots,$$

qui converge, quels que soient x, z, β , sauf pour $\beta = 0$. En effet, le terme de rang $(n+1)$ a pour expression asymptotique $\frac{x}{\beta^2} e^{\frac{z-x}{\beta}} \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série absolument convergente.

On peut réduire la fonction F à ne contenir que deux variables, et prendre pour type $F(x, z, -1)$, que j'appellerai $G(x, z)$:

$$(21) \quad G(x, z) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z+1)^2} + \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n+1}} + \dots,$$

et l'on aura

$$F(x, z, \beta) = -\frac{1}{\beta} G\left(-\frac{x}{\beta}, -\frac{z}{\beta}\right).$$

La nouvelle transcendante $G(x, z)$ est définie par l'équation (21) comme une fonction uniforme de x et de z , dans toute l'étendue du plan. Elle est synectique par rapport à x , et fractionnaire par rapport à z ; elle a les mêmes pôles que la fonction $\Gamma(z)$.

15. Bien que la fonction $G(x, z)$ ne coïncide en aucune façon avec $\frac{1}{z-x}$, elle a cependant deux propriétés qui rappellent son

origine. On obtient la première de ces propriétés en différentiant, par rapport à x et par rapport à z , les deux membres de (21)

$$\frac{\partial G(x, z)}{\partial x} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(z+2)^3} + \dots + \frac{n(x+1)(x+n)^{n-2}}{(z+n)^{n+1}} + \dots$$

$$\frac{\partial G(x, z)}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2x}{(z+1)^3} - \dots - \frac{nx(x+n-1)^{n-2}}{(z+n-1)^{n+1}} - \dots,$$

d'où l'on conclut

$$(22) \quad \frac{\partial G(x, z)}{\partial x} = -\frac{\partial G(x+1, z+1)}{\partial z},$$

propriété qui correspond à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{z-x} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z-x} \right).$$

Je parlerai plus loin de la seconde propriété; mais je veux m'arrêter un instant à la première, en observant que $\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}$ n'est autre que la série que l'on obtiendrait, en appliquant la série d'Abel, pour $\beta = -1$, à la fonction $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z-x} \right)$. De même, en différentiant G plusieurs fois par rapport à z , on a le même résultat que si l'on différencie $\frac{1}{z-x}$ et qu'on applique ensuite la série d'Abel. Par conséquent, si l'on forme la série d'Abel avec une fraction rationnelle quelconque $[E(x)]$ représente la partie entière]

$$\begin{aligned} \varphi(x) = E(x) + \frac{A}{z-x} + \frac{A_1}{(z-x)^2} + \frac{A_2}{(z-x)^3} - \dots \\ + \frac{A'}{z'-x} + \frac{A'_1}{(z'-x)^2} + \frac{A'_2}{(z'-x)^3} - \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

on obtient une série convergente, qui représente la fonction suivante :

$$\begin{aligned} E(x) + AF(x, z, \beta) - A_1 \frac{\partial}{\partial z} F(x, z, \beta) + \frac{A_2}{1,2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(x, z, \beta) - \dots \\ + A'F(x, z', \beta) - A'_1 \frac{\partial}{\partial z'} F(x, z', \beta) + \frac{A'_2}{1,2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} F(x, z', \beta) - \dots \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

On peut donner une autre forme à cette fonction, en rem-

plaçant les dérivées par rapport à z par les dérivées par rapport à x , en vertu de (23), et écrire

$$\begin{aligned} E(x) + AF(x, z, \beta) &= A_1 \frac{\partial}{\partial x} F(x - \beta, z - \beta, \beta) \\ &- \frac{A_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x - 2\beta, z - 2\beta, \beta) - \dots \\ &+ A' F(x, z', \beta) - A'_1 \frac{\partial}{\partial x} F(x - \beta, z' - \beta, \beta) \\ &+ \frac{A'_2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x - 2\beta, z' - 2\beta, \beta) - \dots \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On peut aussi intégrer la fonction G par rapport à l'une ou l'autre des variables x , z , et les deux opérations donnent lieu à une propriété analogue à (22). Le développement qu'on obtient en intégrant par rapport à z la fonction $F(x, z, \beta)$ est celui qui résulterait de la série d'Abel appliquée à la fonction $\log(z - x)$. Il converge, comme on voit, dans tous les cas, sauf pour $\beta = 0$, et ne représente pas la fonction. Cet exemple est particulièrement intéressant en ce que le *Mémoire d'Abel* contient effectivement la série correspondante comme représentant le logarithme, ce qui est une erreur manifeste.

A ce propos, on ne doit pas perdre de vue que le *Mémoire d'Abel*, dont il s'agit ici, n'a pas été publié par lui-même; bien qu'il offre un très haut intérêt, on doit assurément le classer, suivant l'expression employée par les savants auteurs de la 2^e édition, au nombre des « travaux de jeunesse, datant d'une époque où la » critique d'Abel n'était pas encore complètement développée. » Quand Abel, ajoutent MM. Sylow et Lie, parle plus tard des » faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, » il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté » lui-même dans ses anciens travaux, depuis longtemps rejetés » par lui (1). » Il serait bien injuste, comme on voit, d'accuser Abel d'une erreur qu'il avait peut-être reconnue, et qu'en tous les cas il n'avait pas livrée au public.

16. La seconde propriété de la fonction $G(x, z)$ que je désire

(1) *Œuvres complètes d'Abel*, 2^e édition, Préface, p. iii.

signaler se rapporte au développement de cette fonction suivant les puissances de z , à exposants positifs et négatifs.

Si l'on suppose que le module de z soit compris entre n et $n+1$, les $(n+1)$ premiers termes de (21) sont développables suivant les puissances décroissantes de z , tandis que tous les suivants sont développables suivant les puissances croissantes de z . On a ainsi deux parties, l'une $\Phi(z)$, provenant des termes à partir du $(n+2)^{\text{ième}}$, et procédant suivant les puissances à exposants positifs, l'autre procédant suivant les puissances à exposants négatifs. La propriété dont je parle consiste en ce que cette seconde partie coïncide, jusqu'aux termes de degré $(n+1)$ inclusivement, avec le développement de $\frac{1}{z-x}$, en sorte qu'on a

$$G(x, z) = \Phi(z) + \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z^{n+2}} \Psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\Phi(z)$ étant un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de z , $\Psi(z)$ un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de $\frac{1}{z}$; et cette formule est valable quand le module de z est compris entre n et $(n+1)$.

A cette propriété s'en rattache une autre que l'on pourrait chercher à établir directement, pour donner une base différente à la démonstration des propositions II et III; mais c'est là une recherche que je ne veux pas entreprendre pour le moment.

Soit $f(z)$ une fonction synectique dans tout le plan, et considérons l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int f(z) F(x, z, \beta) dz$, prise le long d'un contour infiniment grand. D'après (21), cette intégrale n'est autre que

$$f(x) + \frac{x}{1} f'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{1.2} f''(\beta) + \dots - \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1.2\dots n} f^{(n)}(\beta) + \dots$$

Par conséquent :

Si $f(x)$ est développable suivant la série d'Abel relative à la constante β , l'intégrale $\frac{1}{2i\pi} \int f(z) F(x, z, \beta) dz$, prise le long d'un contour infiniment grand, est égale à $f(x)$.

20. Je vais donner, en terminant, une autre propriété de la fonction $G(x, z)$, qui la rapproche, à un autre point de vue, de la fonction $\Gamma(z)$.

Je reprends le développement, établi au n° 12, pour la fonction $e^{\lambda x}$, par la série d'Abel, et, supposant $\beta = -1$, j'observe que les conditions (18) sont satisfaites quand λ est réel et compris entre zéro et l'unité. Je peux donc employer ce développement dans l'intégrale suivante, et écrire

$$(23) \quad \int_0^1 e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda = \int_0^1 e^{-\lambda z} d\lambda \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \int_0^1 \lambda^n e^{-\lambda(z+n)} d\lambda \dots$$

Considérons maintenant l'équation

$$(24) \quad \mu e^{-\mu} = \lambda e^{-\lambda},$$

où λ sera censé donné, et μ sera l'inconnue. Si l'on fait varier λ par des valeurs réelles depuis 1 jusqu'à $+\infty$, l'équation a une autre racine réelle μ , qui varie depuis 1 jusqu'à zéro. Mettons cette racine μ , fonction réelle de λ , dans l'intégrale ci-après, et observons que $e^{\mu x}$ est encore développable comme tout à l'heure $e^{\lambda x}$; nous aurons ainsi

$$\int_1^\infty e^{\mu x - \lambda z} d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \int_1^\infty \mu^n e^{-\mu x} e^{-\lambda z} d\lambda \dots$$

Ce que, d'après (24), nous pourrons écrire encore sous cette autre forme

$$(25) \quad \int_1^\infty e^{\mu x - \lambda z} d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \int_1^\infty \lambda^n e^{-\lambda(z+n)} d\lambda \dots$$

Ajoutant membre à membre les équations (23) et (25), j'ai maintenant

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{\mu x - \lambda z} d\lambda + \int_0^1 e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda &= \int_0^\infty e^{-\lambda z} d\lambda \dots \\ &+ \frac{x(x+n)^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots n} \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(z+n)} d\lambda \dots \\ &= \frac{1}{z} \dots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n-1}} \dots = G(x, z). \end{aligned}$$

Mettant enfin pour l'intégrale (23) sa valeur explicite, j'ai

$$(26) \quad \Phi(x, z) = \int_1^{\infty} e^{x\psi(\lambda) - \lambda z} d\lambda = \frac{1 - e^{x-z}}{x - z} + G(x, z).$$

Telle est la formule que je voulais obtenir. La fonction $G(x, z)$ est exprimée au moyen de l'intégrale définie $\Phi(x, z)$, dans laquelle $\psi(\lambda)$ est la racine réelle, différente de λ , que possède l'équation (24). Cette expression est valable quand la partie réelle de z est positive.

On remarquera que la fonction $\Phi(x, z)$ vérifie, tout aussi bien que $G(x, z)$, l'équation aux différences mêlées (22).

Sur un théorème de Gauss; par M. PEROTT.

(Séance du 7 avril 1882.)

L'illustre Gauss a démontré, dans son Mémoire intitulé : *Summatio quarundam serierum singularium*, que, dans le cas où m et μ sont des nombres entiers et $m > \mu$, l'expression

$$\frac{(1 - x^m)(1 - x^{m-1}) \dots (1 - x^{m-\mu+1})}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^\mu)}$$

est une fonction entière de x . Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce théorème.

On sait que, d étant un diviseur de n , et f_d le produit des facteurs linéaires de $x^n - 1$ qui correspondent aux racines primitives de $x^d - 1 = 0$, on a toujours l'identité

$$x^n - 1 = \prod_{(n)} f_d.$$

où le produit s'étend à tous les diviseurs de n .

On aura par conséquent

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)} \\
 &= \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^{m-\mu})} \\
 &= \frac{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(m)} f_d}{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(\mu)} f_d \prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \dots \prod_{(m-\mu)} f_d} \\
 &= \prod_{d=1}^{d=m} f_d^{E\left(\frac{m}{d}\right) - E\left(\frac{\mu}{d}\right) - E\left(\frac{m-\mu}{d}\right)}.
 \end{aligned}$$

L'expression

$$E\left(\frac{m}{d}\right) - E\left(\frac{\mu}{d}\right) - E\left(\frac{m-\mu}{d}\right)$$

ne peut jamais devenir négative et par conséquent la proposition énoncée se trouve démontrée.

Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques ;
par M. S. GÜNTHER.

(Séance du 3 mars 1882.)

Personne n'ignore que certains problèmes d'intégration indéfinie paraissent absolument insolubles, tandis qu'après examen rigoureux l'intégration peut pourtant être effectuée. Nous citerons, par exemple, certaines intégrales transcendentes connues, pour l'évaluation desquelles on n'avait, d'après Hermite ⁽¹⁾, d'autre procédé que la différentiation directe, jusqu'à ce que Stern ⁽²⁾ et A. Winckler ⁽³⁾ aient fait voir qu'on pouvait les traiter par des

⁽¹⁾ HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, p. 260. Paris, 1873.

⁽²⁾ STERN, *Ueber den Werth einiger Integrale* (*Journal de Crelle*, t. 78, p. 340).

⁽³⁾ A. WINCKLER, *Unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Func-*

méthodes simples. Les exemples n'en manquent pas non plus dans la théorie des intégrales elliptiques; on sait que toute intégrale de la forme

$$\int f[x, R(x)] dx,$$

où f désigne n'importe quelle fonction algébrique, et $R(x)$ la racine carrée d'une expression cubique ou biquadratique, passe pour irréductible en termes finis, c'est-à-dire pour s'exprimer seulement par les trois formes canoniques de Legendre. Cependant, suivant la nature particulière de la fonction f , l'intégration en forme finie peut quelquefois s'effectuer; et en effet Legendre a soumis, dans son célèbre Ouvrage ⁽¹⁾, cette possibilité à une discussion approfondie. Clausen ⁽²⁾ a traité plus tard une des intégrales examinées par Legendre. Enfin, de nos jours, un essai de Malet ⁽³⁾ a dirigé de nouveau l'attention sur ces intégrales *pseudo-elliptiques*, pour les appeler par ce nom. Il étudiait le cas spécial, où $R(x) = 0$ représente une équation réciproque du quatrième degré, et il fit voir que l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{\left(x \pm \frac{1}{x}\right) dx}{\sqrt{ax^4 \mp bx^3 + cx^2 \mp bx + a}}$$

peut être évaluée immédiatement.

Parmi les intégrales pseudo-elliptiques connues aujourd'hui, une des plus intéressantes est la suivante :

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}}.$$

Legendre et Clausen s'en sont occupés; et ce dernier analyste,

tionen (*Sitzungsberichte d. math.-phys. Classe der Oesterr. Acad.*, t. LXX. Vienne, 1874).

⁽¹⁾ LEGENDRE, *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes*, t. I, p. 136. Paris, 1827.

⁽²⁾ CLAUSEN, *Ueber ein Integral in Legendre's Traité des fonctions elliptiques* (*Astronom. Nachrichten*, n° 442; *Archiv der Mathem. und Physik*, III^e Partie. p. 335).

⁽³⁾ MALET, *Two theorems in integration* [*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. VI, (2). p. 253].

si réputé pour son habileté à transformer les expressions algébriques, a fait usage d'un procédé dont on ne peut s'empêcher d'admirer l'extrême élégance, quoiqu'on ne saisisse pas bien pourquoi il a choisi justement cette voie. C'est ce point que nous avons entrepris d'éclaircir, et nous croyons avoir atteint notre but. Envisageant la méthode de Clausen, nous sommes parvenus à la conception d'un criterium au moyen duquel on peut décider en certains cas si une intégrale elliptique proposée possède effectivement ce caractère, ou bien si elle n'en a que les apparences.

Opérant sur la fraction

$$\frac{x}{x^3 + 8},$$

et posant

$$\frac{6x}{x^3 + 8} = \frac{\alpha x^2}{x^3 + 8} + \frac{\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}{x^2 - 2x + 4} + \frac{\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2}{x + 2},$$

l'identification donne les valeurs

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{2}.$$

et l'on obtient par là

$$\frac{6x}{x^3 + 8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{x^3 + 8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 1}{x + 2}.$$

En désignant par B_1, B_2, B_3 ces trois fractions, abstraction faite de leurs coefficients constants, nous aurons

$$\begin{aligned} S &\equiv \int \frac{6x \, dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{B_1}{\sqrt{x^3 - 1}} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{B_2}{\sqrt{x^3 - 1}} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{B_3}{\sqrt{x^3 - 1}} \, dx + \text{const.} \end{aligned}$$

Il existe un théorème général qui s'applique à ces trois intégrales et que l'on pourrait nommer le théorème *des coefficients indéfinis*. En voici l'énoncé :

Lorsque l'on cherche si l'intégrale

$$S = \int \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{dx}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

dans laquelle $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ représentent deux fonctions algébriques entières, respectivement d'ordre P et N , est une intégrale elliptique ou si elle peut s'effectuer sous forme finie, on posera

$$y = \frac{\alpha x^{N-P+2} + \beta x^{N-P+1} + \dots + \mu x + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

et l'on formera l'expression

$$\frac{dy}{my^2 + n}.$$

En posant ensuite

$$\frac{dy}{my^2 + n} = \frac{\zeta \varphi(x) dx}{\psi(x) \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}},$$

ζ désignant un facteur arbitraire constant, on obtiendra par l'identification des coefficients de $x^0, x^1, x^2, \dots$ un système d'équations. La simultanéité de ces équations est une condition suffisante pour que l'intégrale S appartienne aux intégrales pseudo-elliptiques.

On obtient, en effet, en posant

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = p, \quad py = z,$$

$$S = \frac{1}{\zeta} \int \frac{dy}{my^2 + n} = \frac{1}{\zeta n} \int \frac{dy}{1 + p^2 y^2} = \frac{1}{\zeta np} \int \frac{dz}{1 + z^2},$$

ou enfin

$$S = \frac{1}{\zeta np} \arctan z = \frac{1}{\zeta \sqrt{mn}} \arctan \left[\sqrt{\frac{m}{n}} \frac{\alpha x^{N-P+2} + \dots + r}{\sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}} \right],$$

où il faudrait encore ajouter la constante arbitraire.

On voit immédiatement qu'une des nouvelles inconnues $\alpha, \beta, \dots, \mu, r, m, n$ reste toujours arbitraire et que notre problème se réduit à exprimer par elle toutes les autres.

Appliquons maintenant notre règle générale à chacune des trois intégrales de Clausen. Considérant d'abord la plus simple,

$$S_1 = \int \frac{B^3 dx}{2\sqrt{x^3 - 1}}.$$

nous écrirons d'après notre méthode

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad dy = \frac{(x^3 - 1)(4\alpha x + 2\beta) - 3x^2(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)}{2(x^3 - 1)\sqrt{x^3 - 1}},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dy}{my^2 + n} &= \frac{\alpha x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[m\alpha^2 x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]} \\ &= \frac{1}{2} \frac{x - 1}{x + 2}. \end{aligned}$$

D'où l'on tire ces six équations :

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad \alpha = m\alpha^2, \\ \text{II.} & \quad -\beta + 2\alpha = 2m\alpha\beta + n - m\alpha^2, \\ \text{III.} & \quad -3\gamma - 2\beta = m\beta^2 + 2m\alpha\gamma - 2m\alpha\beta - n, \\ \text{IV.} & \quad -4\alpha - 6\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2 - 2m\alpha\gamma, \\ \text{V.} & \quad -2\beta - 8\alpha = m\gamma^2 - n - 2m\beta\gamma, \\ \text{VI.} & \quad -4\beta = -m\gamma^2 + n. \end{aligned}$$

En éliminant $n = m\gamma^2 - 4\beta$ des équations II et III, nous obtenons ce nouveau système :

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad m\alpha = 1, \\ \text{II}^a. & \quad 3\alpha + \beta = m\gamma^2, \\ \text{III}^a. & \quad -4\beta - 5\gamma = m\beta^2 - m\gamma^2, \\ \text{IV}^a. & \quad -4\alpha - 4\gamma = 2m\beta\gamma - m\beta^2. \end{aligned}$$

En éliminant ensuite $m = \frac{1}{\alpha}$ nous obtenons trois équations homogènes pour α, β, γ

$$\begin{aligned} \text{II}^b. & \quad 3\alpha^2 + \alpha\beta = \gamma^2, \\ \text{III}^b. & \quad -4\alpha\beta - 5\alpha\gamma = \beta^2 - \gamma^2, \\ \text{IV}^b. & \quad -4\alpha^2 - 4\alpha\gamma = 2\beta\gamma - \beta^2. \end{aligned}$$

Enfin l'élimination de l'inconnue α nous donne les deux équations

$$\begin{aligned} \text{II}^c. & \quad \beta^3 + 5\beta\gamma + 18\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^3 + 22\gamma^4 = 0, \\ \text{IV}^c. & \quad 4\beta^3 + 27\beta^2\gamma + 54\beta\gamma^2 + 32\gamma^3 = 0. \end{aligned}$$

Il faut donc résoudre l'équation cubique

$$4\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3 + 27\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 + 54\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) + 32 = 0.$$

qui nous donne la valeur réelle $\frac{\beta}{\gamma} = -2$, $\beta = -2\gamma$. Or, en substituant cette valeur dans l'équation II^b, nous aurons $z = \gamma$ et, à cause de l'équation I, $m = \frac{1}{\gamma}$. Enfin nous tirons de l'équation VI la valeur $n = \frac{1}{\gamma} \cdot \gamma^2 + 4 \cdot 2\gamma = 9\gamma$. Jusqu'à présent, nous n'avons pas eu égard à l'équation V, mais si l'on y substitue les valeurs obtenues pour z, β, m, n , on voit qu'elle est identiquement satisfaite.

On reconnaît aussi sans difficulté que γ disparaît des calculs. Nous obtiendrons de cette manière

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^3 - 1}}, \quad \frac{dy}{my^2 + n} = \frac{dy}{y^2 + 9},$$

et

$$\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x+2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{9} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \text{arc tang} \frac{y}{3},$$

ou

$$S_1 = \frac{1}{3} \text{arc tang} \frac{(x-1)^2}{3\sqrt{x^3-1}} + \text{const.}$$

Par là se trouve aussi résolue une question proposée dernièrement par Realis (1); la deuxième intégrale

$$\int \frac{x+1}{x-2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$$

dont il propose la recherche se ramène sans difficulté à la précédente, et probablement aussi la troisième, qui se présente sous la forme plus compliquée

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x + 2} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax^2 - 3x - 2}}$$

peut être soumise à une méthode analogue d'évaluation.

(1) REALIS, Question proposée n° 102 (*Mathesis*, t. II, p. 48).

Arrivons maintenant à l'intégrale

$$S_2 \equiv \int \frac{B_2 dx}{2\sqrt{x^3-1}}.$$

Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ possèdent aussi dans ce cas le même degré; le nombre $(N-P)$ est nul et nous avons comme équation fondamentale la suivante :

$$\frac{\alpha x^4 - \beta x^3 - 3\gamma x^2 - 4\alpha x - 2\beta}{2[mx^2x^4 + (2m\alpha\beta + n)x^3 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^2 + 2m\beta\gamma x + (m\gamma^2 - n)]} \\ = \frac{1}{2} \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 4}.$$

La multiplication élevant chaque membre de cette équation au sixième degré, on obtient sept équations pour le calcul des grandeurs $\alpha, \beta, \gamma, m, n$; ce sont les suivantes :

- I. $\alpha = -m\alpha^2,$
- II. $-2\alpha - \beta = -2m\alpha\beta - n + 2m\alpha^2,$
- III. $-3\gamma + 2\beta + 4\alpha = -m\beta^2 - 2m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta - 2n + 2m\alpha^2,$
- IV. $-4\alpha - 6\gamma - 4\beta = -2m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma + 4m\alpha\beta + 2n,$
- V. $-2\beta + 8\alpha - 12\gamma = -m\gamma^2 - n + 4m\beta\gamma + 2m\beta^2 + 4m\alpha\gamma,$
- VI. $-16\alpha + 4\beta = 2m\gamma^2 - 2n + 4m\beta\gamma,$
- VII. $-8\beta = 2m\gamma^2 - 2n.$

On réduit avec avantage toutes ces inconnues à la grandeur n et l'on trouve d'une manière semblable à celle que nous avons exposée plus haut

$$\alpha = 0, \quad \beta = n, \quad \gamma = -n, \quad m = -\frac{3}{n}, \quad n = n,$$

et alors par la différentiation directe $n = \zeta = 1$. Ainsi on obtient

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}}, \quad \frac{dy}{m\gamma^2+n} = \frac{dy}{3\gamma^2+1}$$

et, pour $z = \pm\sqrt{3}\gamma i$,

$$-\frac{1}{2} \int \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x+4} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \int \frac{dy}{-3\gamma^2+1} = \frac{1}{\sqrt{-3}} \int \frac{dz}{1+z^2} \\ = \frac{1}{\sqrt{-3}} \operatorname{arctang} z,$$

ou

$$S_2 = -\frac{i}{\sqrt{3}} \operatorname{arc tang} \left[\sqrt{3} i \frac{x-1}{\sqrt{x^3-1}} \right] + \text{const.}$$

On sait que toute fonction trigonométrique inverse de cette forme peut être transformée en un logarithme réel, ce qui donne pour S_2 la valeur

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{1+x\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}} + \text{const.}$$

et après la substitution de x

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

La troisième intégrale de Clausen appartient évidemment à une autre catégorie, parce que la fonction $\psi(x)$ y surpasse la fonction $\varphi(x)$ à l'égard de son degré. Il faut dans notre théorème poser $N - P = 1$. Si l'on pose

$$y = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{\sqrt{x^3-1}},$$

$$dy = \frac{3\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{2(x^3-1)\sqrt{x^3-1}} dx,$$

et si l'on forme alors l'expression

$$\frac{dy}{my^2+n},$$

on obtient l'équation

$$\frac{3\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - (6\alpha + 3\delta)x^2 - 4\beta x - 2\gamma}{x^6 + 2m\alpha\beta x^5 + (m\beta^2 + 2m\alpha\gamma)x^4 + (2m\alpha\delta + 2m\beta\gamma + n)x^3 + (m\gamma^2 + 2m\beta\delta)x^2 + 2m\gamma\delta x + (m\delta^2 - n)}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{x^2}{x^3 + 8}.$$

L'identification donne alors les neuf équations

- | | |
|------|--|
| I. | $3\alpha = 3m\alpha^2,$ |
| II. | $\beta = 6m\alpha\beta,$ |
| III. | $-\gamma = 3m\beta^2 + 6m\alpha\gamma,$ |
| IV. | $-6\alpha + 24\alpha - 3\delta = 6m\alpha\delta + 6m\beta\gamma + 3n,$ |

$$\text{V.} \quad -4\beta + 8\gamma = 3m\gamma^2 + 6m\beta\delta,$$

$$\text{VI.} \quad -2\gamma - 8\gamma = 6m\gamma\delta,$$

$$\text{VII.} \quad -48x - 24\delta = 3m\delta^2 - 3n.$$

$$\text{VIII.} \quad -32\beta\gamma = 0,$$

$$\text{IX.} \quad -16\gamma = 0.$$

La résolution de ce système s'exécute avec beaucoup moins de difficulté que celle des deux systèmes antérieurs. La valeur $\gamma = 0$ découle immédiatement de l'équation IX, et l'équation III donne alors $\beta = 0$. En ajoutant les deux équations IV et VII on obtient

$$-30x - 27\delta = 6m\alpha\delta + 3m\delta^2,$$

$$-10x - 9\delta = 2m\alpha\delta + m\delta^2,$$

ou, à cause de l'équation I $\left(m = \frac{1}{x}\right)$,

$$-10x - 9\delta = 2\delta + \frac{\delta^2}{x},$$

$$\left(\frac{\delta}{x}\right)^2 + 11\left(\frac{\delta}{x}\right) = -10.$$

Cette équation possède les deux racines réelles $\frac{\delta}{x} = -10$ et $\frac{\delta}{x} = -1$, mais on gagne facilement la persuasion que la première ne satisfait pas au système entier et qu'il faut pour cela choisir la seconde. En substituant $\delta = -x$ dans l'une des équations IV ou VII on calcule $n = 9x$, et la série de nos valeurs est alors la suivante :

$$x = x, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -x, \quad m = \frac{1}{x}, \quad n = 9x.$$

Quant à la grandeur x , la différentiation nous apprend qu'il faut prendre $x = \zeta = 1$. Or, on est parvenu au résultat

$$\frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \int \frac{dy}{y^2 - 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{3}$$

ou

$$S_3 = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x^3 - 1}{3\sqrt{x^3 - 1}} + \text{const.} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3} + \text{const.}$$

Si l'on résume tous les résultats précédents, on peut écrire

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{3} + \frac{1}{3} \arctan \frac{(x - 1)^2}{3\sqrt{x^3 - 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{3(x - 1)}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3(x - 1)}} + \text{const.} \right]$$

ou, par l'application de la formule connue

$$\arctan u + \arctan v = \arctan \frac{u + v}{1 - uv}$$

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8)\sqrt{x^3 - 1}} = \frac{1}{18} \arctan \frac{3x(x - 1)}{(1 - x)\sqrt{x^3 - 1}} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{3(x - 1)}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3(x - 1)}} + \text{const.}$$

C'est la formule donnée par Clausen. Nous espérons que le lecteur sera d'accord avec nous dans l'opinion que le chemin dont la poursuite nous a conduit à ce résultat a été réellement celui du mathématicien allemand. Notre théorème n'éclaircit pas seulement un calcul qui semble mystérieux au premier abord, mais il peut aussi, dans beaucoup de cas, servir de critérium pour reconnaître si une intégrale elliptique donnée peut s'effectuer en termes finis.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 4 NOVEMBRE 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

M. Saltel adresse une Note intitulée *Méthode pour lever, dans divers systèmes d'équations, l'indétermination résultant de l'égalité entre certaines inconnues.*

Communication :

M. Laguerre : *Sur quelques propriétés des coniques.*

SÉANCE DU 18 NOVEMBRE 1881.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Élections : MM. Boncompagni (le prince Balthasar), Floquet, Imber, Price (Bartholoméo), présentés dans la dernière séance par MM. Fouret et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Jordan : *Sur la différentiation sous le signe f .*

M. Humbert : *Sur les courbes de Clebsch dont les coordonnées s'expriment en fonction elliptique d'un paramètre.*

M. Stephanos : *Sur les courbes de la quatrième classe.*

M. de Polignac : *Sur une propriété des coniques.*

SÉANCE DU 2 DÉCEMBRE 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Communications :

M. André : *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires qui ont une équation dérivée régulière.*

M. Laguerre : *Sur la séparation des racines.*

M. de Polignac : *Sur une propriété des systèmes en involution.*

M. Weill : *Sur un théorème d'Arithmétique.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1881.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Communication :

M. Halphen : *Sur une série d'Abel.*

SÉANCE DU 6 JANVIER 1882.

PRÉSIDENTE DE M. LAGUERRE.

Le Bureau et le Conseil sont renouvelés, comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

M. Lindemann adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre.*

Communications :

M. Weill : *Théorème sur les factorielles.*

M. André : *Observations sur le théorème de M. Weill, et conséquences relatives aux nombres premiers.*

M. Laisant : *Sur certaines propriétés des centres de gravité.*

M. Stephanos : *Sur la détermination du huitième point commun aux surfaces du second degré passant par sept points donnés.*

SÉANCE DU 20 JANVIER 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Asselin et Laveissière, présentés dans la dernière séance par MM. Humbert et de Polignac, sont élus membres de la Société.

M. Perrin, au nom de la Commission des comptes, donne lecture de son Rapport sur la gestion du Trésorier en 1881. Sur sa proposition, la Société vote des remerciements à M. Claude Lafontaine et une gratification à ses agents.

Communications :

M. André : *Théorèmes sur les factorielles.*

M. Halphen : *Sur les aspects des paysages.*

M. Weill : *Sur les lunules exactement carrables par la règle et le compas.*

SÉANCE DU 3 FÉVRIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Brault, Escary, Gunther, Zeuthen, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

M. Malmstén, présenté dans la dernière séance par MM. Hermite et Laguerre, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Laisant : *Remarques sur la théorie des régions et des aspects.*

M. Weill : *Sur un triangle en nombres entiers dans lequel le rapport des deux angles est un nombre entier.*

SÉANCE DU 17 FÉVRIER 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Elections : MM. Goursat et Schlegel, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur les courbes anallagmatiques admettant un lieu géométrique de pôles principaux d'inversion.*

M. Laguerre : *Sur deux systèmes de neuf points, se correspondant un à un, et donnant lieu chacun à douze triangles semblables.*

M. Perrin : *Sur le problème des aspects et des régions.*

M. Weill : *Sur une propriété de la courbe $x^3y = y^4$.*

M. Fouret : *Sur une propriété de la courbe $x^4y^2 = y^3$.*

SÉANCE DU 3 MARS 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

M. Appell adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables.*

M. Gunther envoie une Note manuscrite *Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques.*

Communications :

M. Jordan : *Sur les formules complémentaires des lois de réciprocité.*

M. Perrin : *Sur le problème des aspects et des régions.*

SÉANCE DU 17 MARS 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élection : M. Gascheau, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Stephanos : *Sur une application de la théorie des carrelages.*

M. Halphen : *Sur une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.*

M. Halphen : *Sur le problème des aspects, et ses rapports avec le Calcul intégral.*

M. Weill : *Sur les courbes admettant des polygones à la fois inscrits et circonscrits.*

SÉANCE DU 7 AVRIL 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Kostenec, Panek et Pokorny, présentés dans la dernière séance par MM. Weyr (Édouard) et Picquet, M. Drey-

fus (Ferdinand), présenté par MM. Laisant et de Reinach, M. Lévy (Lucien), présenté par MM. Halphen et Picquet, M. Paturet, présenté par MM. Lucas et Laisant, et M. Tarry, présenté par MM. Brocard et Laquière, sont élus membres de la Société.

M. le Président donne lecture d'une Lettre de M. Brioschi par laquelle il déclare que ce n'est que par suite d'une erreur qu'il a pu être considéré comme démissionnaire.

M. Perott adresse une Note manuscrite *Sur un théorème de Gauss*.

M. Tarry adresse une Note manuscrite *Sur quelques propriétés des coniques*.

L'Institut vénitien des Sciences, Lettres et Arts, demande l'échange de ses publications avec le *Bulletin* de la Société.

Communications :

M. Perrin : *Sur le problème des aspects*.

M. Stephanos : *Sur la rotation des corps solides autour d'un point*.

M. Weill : *Sur le centre des moyennes distances*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (¹).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 4 NOVEMBRE 1881.

Ovidio (d') : *Sur quelques invariants de deux formes binaires*.

Kronecker : *Sur le potentiel. Sur la théorie de l'élimination. Sur les fonctions symétriques*.

Euclide : Ancien exemplaire, offert par M. L. Hugo.

Chelini (Dominique) : *Mémoires mathématiques*, publiés par les soins de MM. Cremona et Beltrami.

Laisant : *Sur les séries récurrentes*. (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*.)

(¹) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir page 101).

Laisant : *Sur le Calcul des opérations chimiques.* (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.*)

Liguine : *Sur les courbes anallagmatiques.* (Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.*)

Euclide : Édition de Guido Grandi, ayant appartenu à Chasles, offert par M. L. Hugo.

Abel : *Œuvres complètes*, publiées par MM. L. Sylow et S. Lie; Grondahl et Son, Christiania, 1881.

Le Paige : *Sur les formes trilinéaires. Sur les involutions d'ordre supérieur.*

Picquet : *Traité de Géométrie analytique* (1^{re} Partie). Masson, Paris; 1882.

Sibiriakoff : *Preuve élémentaire de la proposition fondamentale de la théorie des parallèles.*

Aoust (l'abbé) : *Considérations sur les études géométriques et cinématiques de M. Habich.*

Catalan : *Sur quelques décompositions en carrés.* Rome; 1882.

Leoncio de la Barcena : *Tratado di Taquimetria.* Madrid; 1882.

Schubert : *Losung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems.* Hambourg; 1882.

Schubert : *Elementarer Beweis des Feuerbach'schen Satzes.* Hambourg; 1882.

Iacon : *Περὶ τῶν ἀρ/ῶν τῆς Γεωμετρίας.* Athènes; 1881.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le problème des aspects; par M. PERRIN.

(Séances du 17 février et du 3 mars 1882.)

1. Le problème des divers aspects sous lesquels on peut voir un système de n points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté, a fait l'objet, dans les séances précédentes de la Société mathématique, de deux intéressantes Communications :

l'une de M. Halphen, qui a formulé l'énoncé précis du problème, l'a traité dans les cas les plus simples, et a montré comment il se rattache à l'étude des discontinuités de certaines intégrales définies; l'autre de M. Laisant, qui a donné l'expression, en fonction de n , d'une limite supérieure du nombre R des régions d'aspect constant, c'est-à-dire déterminées par la condition que l'observateur circulant à volonté dans l'une de ces régions ne cesse pas de voir le système des n points sous le même aspect (dans le même ordre circulaire), mais que l'aspect change dès qu'il passe dans l'une des régions contiguës.

A l'aide de l'expression donnée par lui, M. Laisant a fait ressortir avec quelle rapidité décroît, quand on fait croître n au delà de 5, le rapport du nombre des aspects possibles au nombre $(n - 1)!$ des aspects imaginables. Mais le nombre lui-même R des régions d'aspect constant paraissait difficile à déterminer, car il ne dépend pas seulement du nombre n des points du système, mais aussi de la manière dont ces points sont distribués les uns par rapport aux autres, comme on le voit immédiatement en faisant la figure pour $n = 4$; il était donc indispensable d'introduire quelque nouvel élément qui permît de tenir compte de cette distribution relative des points. Je vais exposer les résultats auxquels je suis parvenu dans cet ordre d'idées, en généralisant un peu le problème, résultats qui pourront sans doute être utilisés aussi dans d'autres questions.

2. Soient donnés à volonté dans le plan n points, que j'appellerai les *sommets* du système (*). Si on les joint par des droites de toutes les manières possibles, on obtiendra m droites

$$\left[m = \frac{n(n-1)}{2} \right],$$

dont chacune se trouvera divisée par les deux sommets qu'elle joint en trois segments, savoir un intérieur (compris entre les deux sommets) et deux extérieurs. Si les m droites étaient tracées d'une manière quelconque, elles se couperaient en $\frac{m(m-1)}{2}$ points;

(*) Je fais abstraction des cas particuliers où plusieurs sommets ou séries de sommets seraient disposés en ligne droite.

chaque sommet remplace évidemment $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de ces points d'intersection : il en reste donc

$$(1) \quad \Delta = \frac{1}{1} [m(m-1) - n(n-1)(n-2)].$$

J'appellerai *nœuds* ces Δ point d'intersection des m droites, autres que les segments. Si l'on remplace m par sa valeur $\frac{n(n-1)}{2}$, il vient

$$(2) \quad \Delta = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Les nœuds peuvent se classer en trois espèces, suivant qu'ils résultent du croisement de deux segments extérieurs, de deux segments intérieurs, ou d'un segment extérieur avec un intérieur; je les distinguerai donc en nœuds *extérieurs*, *intérieurs* et *mixtes*, et si δ , δ' , δ'' sont respectivement les nombres de nœuds appartenant à ces trois espèces, on aura

$$(3) \quad \delta + \delta' + \delta'' = \Delta.$$

D'autre part, le nombre φ_0 des régions déterminées par les m droites est, comme l'a établi M. Laisant,

$$(4) \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} [m(m+1) + 2 - n(n-2)(n-3)].$$

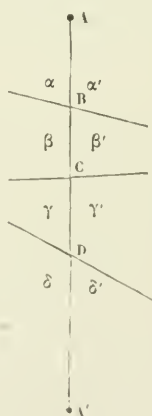
3. Il resterait maintenant, pour obtenir l'ensemble des régions d'aspect constant et en calculer le nombre, à effacer tous les segments *intérieurs* et à rechercher quelle réduction amène cette opération dans le nombre de régions φ_0 donné par la formule (4). Si, au lieu d'effacer tous les segments *intérieurs*, on effaçait tous les segments *extérieurs*, on obtiendrait une configuration en quelque sorte complémentaire de la précédente, et qui, ainsi que l'a montré M. Halphen, se présente concurremment avec elle dans l'étude des discontinuités des intégrales définies auxquelles il a été fait allusion ci-dessus, selon la manière dont on choisit le point de départ des intégrations. Si, enfin, on effaçait un certain nombre de segments tant intérieurs qu'extérieurs, choisis suivant une loi quelconque, on obtiendrait encore une configuration toute différente. Je vais supposer qu'on opère ainsi suivant une loi arbitraire,

et chercher comment varie le nombre des régions lorsque l'on vient à effacer un segment quelconque, à un instant quelconque de l'opération.

À cet instant, on peut se représenter les n sommets, avec les segments non encore effacés qui les relient plus ou moins complètement entre eux, comme formant une configuration analogue à celles que présentent les cartes célestes : quelques sommets peuvent apparaître complètement isolés ; d'autres, réunis entre eux par des segments intérieurs, mais privés de tous les segments extérieurs qui les réunissaient primitivement à la droite de l'infini (ou plutôt au cercle de rayon infiniment grand que l'on peut se représenter comme limitant le plan), formeront une ou plusieurs constellations isolées dans le plan ⁽¹⁾ ; les autres, enfin, seront restés rattachés par des segments extérieurs, soit directement soit par l'intermédiaire de sommets ou de nœuds voisins, au cercle de l'infini ; tous ces derniers, reliés ainsi entre eux par l'intermédiaire du cercle de l'infini, devront être considérés comme ne formant qu'un seul groupe, résidu de la configuration primitive.

Ceci posé, soit à effacer un segment de plus, tel que AA' (*fig. 1*).

Fig. 1.



Deux cas peuvent se présenter : ou la suppression de ce segment

(1) Rien ne s'oppose à ce que ces constellations soient intérieures les unes aux autres.

ne changera rien au nombre des constellations isolées, ou il l'augmentera d'une ou plusieurs unités. Dans le premier cas (le plus fréquent et même le seul qui puisse se présenter au début de l'opération), il est visible que le segment servait de séparation entre autant de couples de régions distinctes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$, qu'il contenait de *nœuds* B, C, D n'ayant pas encore disparu par l'effacement antérieur d'autres segments, plus un; pour chacun de ces couples, les deux régions séparées par le segment se confondent lorsqu'on vient à l'effacer: la réduction produite dans le nombre des régions est donc précisément égale au nombre des nœuds qui disparaissent, plus un. Dans le second cas, considérons l'un des groupes de sommets qui devient isolé quand on efface le segment AA'; ce groupe peut comprendre l'un des deux sommets extrêmes, A par exemple, avec quelques-uns des segments qui croisent AA', ou comprendre seulement quelques-uns de ces segments. Supposons qu'il comprenne le sommet A et le segment qui passe par le nœud B: dès lors les deux régions β et β' se rejoignent déjà en faisant le tour de ce groupe, et la réduction produite dans le nombre des régions par la suppression de AA' sera moindre d'une unité que si $\beta\beta'$ avaient été deux régions distinctes. Supposons, au contraire, que le groupe considéré ne comprenne ni l'un ni l'autre des sommets AA', et que les nœuds B, D soient les deux nœuds extrêmes dépendant de ce groupe sur le segment AA'. Dès lors il est clair que les régions α et δ se rejoignent déjà en contournant le groupe et ne forment qu'une seule région, et de même pour α' et δ' ; la suppression de AA' réunira donc seulement deux régions $\alpha\delta$ et $\alpha'\delta'$ en une seule, au lieu de réunir quatre régions α , α' , δ , δ' en deux $\alpha\alpha'$, $\delta\delta'$. La réduction dans le nombre des régions sera donc encore moindre d'une unité que s'il ne s'était pas formé un nouveau groupe isolé. Réciproquement, on verrait sans peine que cette réduction, moindre dans le nombre des régions, ne peut se présenter que s'il se forme de nouveaux groupes isolés, la différence étant précisément égale au nombre de ces groupes.

Donc, en définitive, si à un instant quelconque on se trouve avoir effacé s' segments, ce qui a fait disparaître d' nœuds, et isolé g sommets ou groupes de sommets, le nombre des régions est devenu

$$r = r_0 = s' - d' + g.$$

Introduisons dans cette expression, au lieu des nombres s' et d' de segments et de nœuds disparus, les nombres s et d de segments et de nœuds qui subsistent, au moyen des relations

$$s = 3m - s', \quad d = \Delta - d';$$

remplaçons, enfin, ρ_0 , Δ et m par leurs valeurs en fonction de n ; il viendra finalement

$$(5) \quad \rho = 1 + s + d + g - n.$$

Il est remarquable que cette formule soit beaucoup plus générale que celles dont nous l'avons déduite : elle s'applique, en effet, à toutes les configurations que l'on peut obtenir en joignant arbitrairement par s lignes, droites ou courbes, n points pris à volonté sur un plan, sur une sphère ou plus généralement sur toute surface simplement connexe. Pour s'en assurer, il suffit de remarquer :

1° Que toute surface simplement connexe pouvant être ramenée à une aire plane à un seul contour, par voie de déformation continue sans déchirure (après avoir au besoin pratiqué une ouverture infiniment petite), la configuration qui y a été tracée sera ainsi ramenée à une configuration plane, sans variation dans le nombre des sommets, des nœuds, des segments, ni des groupes isolés;

2° Que dans une configuration plane, formée de segments courbes, il suffit de considérer comme nouveaux sommets un nombre suffisant de points convenablement choisis sur ces segments, pour pouvoir rectifier les segments plus petits ainsi obtenus, sans introduire de nouveaux nœuds; or tout sommet qu'on introduit ainsi sur un segment augmente d'une unité à la fois s et n , et laisse, par suite, invariable $s - n$, en sorte que la formule (5) ne cesse pas d'être applicable.

Il serait d'ailleurs facile de généraliser encore la formule (5) et d'établir le théorème suivant :

Si k est l'ordre de connexion, défini comme on le fait d'ordinaire dans la théorie des surfaces de Riemann, et que l'on appelle indice de connexion la quantité $2 - k$, s'il s'agit d'une aire ou d'une surface ayant au moins un contour, ou la quantité $3 - k$ s'il s'agit d'une surface fermée : la somme Σi des

indices de connexion des régions déterminées sur une surface ou sur une aire d'indice I en joignant entre eux ou à des points quelconques des contours, au moyen de s segments tracés d'une manière quelconque, n points pris arbitrairement, sera, en appelant d le nombre des points de croisement de ces segments,

$$(6) \quad \Sigma i = I + s + d - n.$$

De cette formule on pourrait déduire plusieurs conséquences intéressantes; je me bornerai à indiquer la relation suivante, entre le nombre F des faces d'un polyèdre (supposées toutes des aires simplement connexes), le nombre S de ses sommets et le nombre A de ses arêtes :

$$(7) \quad F + S = A + I;$$

I est l'indice de connexion de l'ensemble de la surface du polyèdre, c'est-à-dire deux pour les polyèdres ordinaires (sphéroïdaux), zéro pour les polyèdres assimilables au tore ou anneaux polyédriques, etc. Si quelques-unes des faces ne sont pas simplement connexes, on devra prendre pour F la somme des indices de connexion des faces.

En faisant $I = 2$, et exprimant que toutes les faces ont le même nombre p de côtés, et qu'à tous les sommets aboutissent le même nombre q d'arêtes, on obtient la relation

$$f + \frac{pf}{q} = \frac{pf}{2} + 2,$$

ou

$$(8) \quad f = \frac{4q}{2(p+q) - pq},$$

qui caractérise les polyèdres réguliers et permet d'en déterminer le nombre et la nature.

§. Je reviens au problème des aspects. Pour obtenir la configuration qui détermine les régions d'aspect constant, il faut effacer tous les segments intérieurs, ce qui fait disparaître les nœuds intérieurs et mixtes, et ne donne naissance à aucun groupe isolé. Faisant donc dans la formule (5) $s = 2m = n(n-1)$, $d = 6$,

$g = 0$, nous obtenons pour le nombre R des régions d'aspect constant.

$$(9) \quad R = (n - 1)^2 + \delta.$$

Les nœuds extérieurs, dont le nombre δ figure dans l'expression (9), peuvent être définis très simplement, au point de vue du problème des aspects, comme étant les points du plan, en nombre limité, pour lesquels le nombre *apparent* des sommets du système est de $n - 2$, tandis que, pour un point pris au hasard, le nombre apparent est de n , et qu'il se réduit à $n - 1$ pour une infinité simple de points, savoir tous les points des segments extérieurs.

Cherchons maintenant le nombre R' des régions dans le problème complémentaire, celui où l'on ne laisse subsister que les segments intérieurs et par suite aussi que les nœuds intérieurs. Il faudra faire dans la formule (5) $s = \frac{n(n-1)}{2}$, $d = \delta'$ et $g = 1$, puisque l'ensemble des sommets forme alors un groupe unique isolé du cercle de l'infini. Il vient, par suite

$$(10) \quad R' = \frac{n^2 - 3n + 4}{2} + \delta'.$$

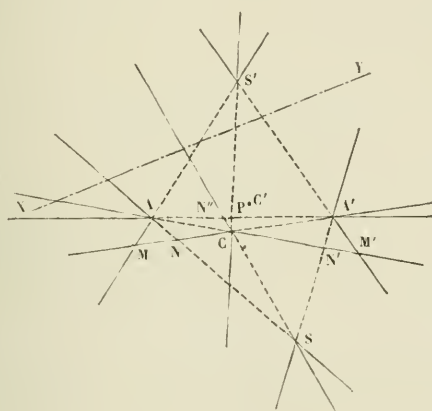
6. La question qui se présente immédiatement est celle-ci : Comment et entre quelles limites varient δ et δ' , lorsqu'on fait varier de toutes les manières possibles la disposition relative des n sommets?

Pour y répondre, remarquons tout d'abord que, le nombre total des nœuds $\delta + \delta' + \delta''$ étant invariable pour une valeur donnée de n , le seul effet d'un changement dans la disposition relative des sommets est de modifier l'*espèce* des nœuds; et, si ce changement s'opère par déplacement relatif *continu* des sommets, chaque modification ne pourra être que le changement d'un nœud, soit extérieur, soit intérieur, en un nœud mixte, ou inversement; et pour qu'un tel changement se produise, il est évidemment nécessaire et suffisant que dans son mouvement relatif un des sommets vienne à traverser quelque part la droite qui en joint deux autres.

Considérons donc un sommet mobile C au moment où il est sur le point de traverser la droite joignant les deux sommets fixes A, A' (fig. 2), et supposons qu'il la traverse entre A et A' .

Soit S un des sommets situés du même côté de AA' que le sommet C dans sa position actuelle, S' un des sommets situés du côté opposé. A l'inspection de la figure, sur laquelle les segments extérieurs ont été tracés en plein et les segments intérieurs en pointillé, il est visible que les trois droites mobiles CA, CA', CS , donnent par leur croisement avec les trois droites fixes $AA', AS, A'S$ trois nœuds mixtes N, N' et N'' ; tandis que, pour le sommet S' , le système mobile correspondant CA, CA', CS' donne par croisement avec le système fixe $AA', AS', A'S'$ deux nœuds extérieurs

Fig. 2.



MM' , et un nœud intérieur P . Lorsque le sommet mobile aura franchi AA' et sera venu en C' , par exemple, il est clair que S et S' n'auront fait que changer de rôle. Si donc il y avait p sommets tels que S , c'est-à-dire situés du côté de AA' où se trouvait d'abord le sommet mobile, et $p' = n - p - 3$ sommets S' du côté opposé, le nombre des nœuds intérieurs aura augmenté de $p - p'$, celui des nœuds extérieurs de $2(p - p')$, et celui des nœuds mixtes de $-3(p - p')$, par le fait du passage de C d'un côté à l'autre du segment intérieur AA' . Si le passage s'était fait par un des segments extérieurs de la même droite, on verrait sans peine que les variations seraient les mêmes en valeur absolue, mais changées de signe.

7. A l'aide de ce qui précède, on pourra trouver par quelques

constructions faciles les valeurs de δ , δ' , δ'' qui correspondent à une disposition donnée quelconque des n sommets, pourvu que l'on connaisse les valeurs δ_0 , δ'_0 , δ''_0 de ces quantités pour une seule disposition particulière bien déterminée, car il suffira de déplacer successivement un certain nombre de sommets convenablement choisis, de manière à transformer la figure donnée en celle pour laquelle on connaît les valeurs des δ ; et de compter, chaque fois que dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui en joint deux autres, combien il reste de sommets de chaque côté de cette droite; de faire la somme des quantités $p - p'$ ainsi trouvées, en les affectant d'un signe convenable, et les valeurs cherchées seront évidemment

$$(11) \quad \begin{cases} \delta = \delta_0 - 2\Sigma(p - p'), \\ \delta' = \delta'_0 - \Sigma(p - p'), \\ \delta'' = \delta''_0 + 3\Sigma(p - p'). \end{cases}$$

Or, parmi toutes les dispositions que l'on peut imaginer pour les n sommets, il y en a une qui se prête immédiatement à la détermination directe des δ : c'est celle dans laquelle les n sommets forment les sommets d'un polygone convexe. Il est évident que dans ce cas $\delta'' = 0$ (et réciproquement, si $\delta'' = 0$, les n sommets forment nécessairement un polygone convexe). Pour déterminer δ (nombre des nœuds extérieurs), supposons que les sommets soient numérotés 1, 2, ..., n à partir de l'un d'eux en faisant le tour du polygone; la droite joignant les sommet 1 et p contiendra un nœud extérieur au croisement de chacune des $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $p-2$ sommets 2, 3, ..., $p-1$, et de chacune des $\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ droites qui joignent deux à deux les $n-p$ sommets numérotés $p+1$, $p+2$, ..., n ; et elle n'en contiendra pas d'autre. Le nombre des nœuds extérieurs situés sur la droite (1, p) sera donc

$$\frac{1}{2} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)],$$

et pour toutes les droites, en nombre $(n-1)$, qui passent par le sommet 1, on aura un nombre total de nœuds extérieurs, ex-

primé par

$$\frac{1}{2} \sum_{p=2}^{p=n} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)].$$

Chacun des n sommets en fournit autant; mais, comme chaque droite passe par deux sommets, et que chaque nœud appartient à deux droites, il faudra diviser le résultat par 4, et l'on aura, en définitive,

$$\delta_0 = \frac{n}{8} \sum_{p=2}^{p=n} [(p-2)(p-3) + (n-p)(n-p-1)].$$

d'où, par un calcul facile,

$$\delta_0 = \frac{1}{12} n(n-1)(n-2)(n-3),$$

et, par suite,

$$\delta_0 = \frac{2}{3} \Delta.$$

Il en résulte immédiatement

$$(12) \quad \delta'_0 = \frac{1}{3} \Delta.$$

Dès lors, posant $\Sigma(p-p') = \varepsilon$, les relations (11) deviennent

$$(13) \quad \begin{cases} \delta = 2\left(\frac{\Delta}{3} - \varepsilon\right), \\ \delta'' = \frac{\Delta}{3} - \varepsilon = \frac{\delta}{2}, \\ \delta''' = 3\varepsilon. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les relations (9) et (10), et exprimant Δ en fonction de n , il vient enfin

$$(14) \quad R = \frac{1}{12} (n-1)(n^3 - 5n^2 + 18n - 12) - 2\varepsilon,$$

$$(15) \quad R' = \frac{1}{24} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 42n + 48) - \varepsilon,$$

d'où l'on tire la relation

$$(16) \quad R - 2R' = n - 3.$$

8. Ces divers résultats peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

« Soient n points ou sommets pris à volonté sur un plan; si on
 » les joint deux à deux par des droites, dont chacune est ainsi di-
 » visée en trois segments, ces droites se couperont en

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

» autres points ou *nœuds*. Soit ε un certain entier positif, caractéristique de la disposition relative des n sommets, et qui ne
 » s'annule que si ces n sommets forment un polygone convexe.

» Soient δ , δ' , δ'' les nombres respectifs des nœuds *extérieurs*
 » (provenant du croisement de deux segments extérieurs), *inté-*
 » *rieurs* (croisements de deux segments intérieurs), et *mixtes*
 » (croisements d'un segment extérieur avec un intérieur) : le
 » nombre δ des nœuds extérieurs est toujours *double* du nombre δ'
 » des nœuds intérieurs, quelle que soit la disposition relative des
 » sommets, et le nombre δ'' des nœuds mixtes est toujours un
 » multiple de 3 ($\delta'' = 3\varepsilon$).

» Soit R le nombre des régions entre lesquelles le plan se trouve
 » divisé quand on efface tous les segments intérieurs, ce qui ne
 » laisse subsister que les δ nœuds extérieurs; soit de même R' le
 » nombre des régions quand on efface tous les segments extérieurs,
 » ce qui ne laisse subsister que les δ' nœuds intérieurs; R et R'
 » dépendent respectivement de n et δ , de n et δ' par les relations
 » très simples (9) et (10), et sont, par conséquent, des fonctions
 » de n et ε , données par les formules (14) et (15), et qui prennent
 » leurs valeurs maxima pour $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire quand les n som-
 » mets forment un polygone convexe; mais $R - 2R'$ reste con-
 » stamment égal à $n - 3$, quelle que soit la disposition relative
 » des n sommets.

» La valeur de la caractéristique ε ou $\frac{\delta''}{3}$ peut s'obtenir sans
 » avoir besoin de tracer toutes les droites du système, en dépla-
 » çant arbitrairement les sommets de manière à les ramener à
 » former un polygone convexe, et en comptant, chaque fois que
 » dans ce déplacement un sommet vient à traverser la droite qui
 » en joindrait deux autres, combien il y a de sommets, non com-

» pris celui qui se déplace, du même côté que lui par rapport à la
 » droite qu'il va franchir : si ce nombre est p , la somme des quan-
 » tités $2p - n + 3$, ainsi calculées pour chaque droite franchie,
 » et affectées du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que le passage a
 » lieu par un segment *intérieur* ou par un segment *extérieur*,
 » donnera précisément ε . »

En supposant $\varepsilon = 0$, on a une limite supérieure R_0 du nombre R des régions d'aspect constant, limite qui est effectivement atteinte dans le cas d'un polygone convexe, et qui est sensiblement moindre que la limite supérieure ρ qu'avait calculée M. Laisant, comme le montre le tableau ci-dessous :

n .	$\partial_{\text{ext}} = \frac{2}{3} \Delta$.	R_0 .	ρ .
3.....	0	4	7
4.....	2	11	18
5.....	10	26	41
6.....	30	55	85
7.....	70	106	162
8.....	140	189	287
9.....	252	316	478
10.....	420	501	756
11.....	660	760	1145
12.....	990	1111	1672
13.....	1430	1574	2367
14.....	2002	2171	3263
15.....	2730	2926	4396

On trouve d'ailleurs aisément que $R_0 = \frac{2\rho - n + 1}{3}$.

9. Il resterait à rechercher quelles valeurs peut prendre en réalité ε pour une valeur donnée de n , quel est, en particulier, le maximum de ε (qui correspond au minimum de ∂ , ∂' , R , R'), et quelles différences au point de vue géométrique présentent entre elles les diverses dispositions de n sommets qui correspondent aux diverses valeurs possibles de ε .

Je présenterai seulement sur ce sujet les remarques suivantes :

1° Si n est impair, ε ne peut prendre que des valeurs paires : cela résulte immédiatement de ce que ε est la somme d'un certain nombre de quantités de la forme $2p - n + 3$.

2° Les deux plus petites valeurs de ε , après zéro, sont $n - 3$,

$2(n-4)$.⁽¹⁾ On le voit immédiatement en partant du polygone convexe à n sommets, qui donne $\varepsilon = 0$: si l'on déplace un des sommets, dans quelque direction que ce soit, la première droite du système qu'il ait à franchir augmente ε de $n-3$, et la seconde qu'il rencontre augmente ε soit de $n-3$, soit de $n-5$; la même chose a lieu si l'on déplace un second sommet au lieu de continuer à déplacer le premier.

3° Il est facile d'assigner, en fonction de n , une limite au-dessous de laquelle δ' ne peut descendre, sans qu'il soit toutefois démontré que cette limite puisse être effectivement atteinte par une disposition convenable des n sommets. Considérons, en effet, la figure obtenue en effaçant les segments extérieurs : elle donne, d'après la formule (10), $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4) + \delta'$ régions, dont chacune est un polygone possédant au moins trois côtés, et, par conséquent, trois angles. Le nombre total des angles de toutes les régions est donc au moins égal à

$$3\delta' + \frac{3}{2}(n^2 - 3n + 4).$$

Mais chaque sommet du système, formant le point de départ de $n-1$ segments intérieurs, fournit $n-1$ angles; chaque nœud en fournit évidemment 4; le nombre total des angles est donc exactement

$$n(n-1) + 4\delta'.$$

Nous pouvons donc écrire l'inégalité

$$n(n-1) + 4\delta' \geq 3\delta' + \frac{3}{2}(n^2 - 3n + 4),$$

d'où

$$(17) \quad \delta' \geq \frac{1}{2}(n-3)(n-4)$$

et, par suite,

$$(18) \quad \begin{cases} \delta \geq (n-3)(n-4), \\ R \geq 2n^2 - 9n - 13, \\ R' \geq n^2 - 5n + 8, \\ \varepsilon \leq \frac{1}{24}(n-3)(n^3 - 3n^2 - 10n + 48). \end{cases}$$

(1) Ou $n-3$, $2(n-3)$, si $n=5$.

Les valeurs limites fournies par ces inégalités peuvent être réalisées en fait, si n est au plus égal à 6. Mais, au delà de 6, il n'en est plus de même, parce qu'il n'est plus possible de faire en sorte que toutes les régions soient de forme triangulaire.

4° Les n sommets étant disposés d'une manière quelconque, concevons qu'une droite, qui les laisse d'abord tous d'un même côté, s'en approche en restant constamment parallèle à une même direction, jusqu'à ce qu'elle vienne à passer par un sommet; qu'elle tourne alors autour de ce premier sommet jusqu'à en rencontrer un second, puis autour de ce second (toujours dans le même sens) jusqu'à en rencontrer un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'elle revienne rencontrer le premier sommet. Nous aurons ainsi construit, au moyen de p des sommets du système, un polygone convexe qui renferme tous les autres à son intérieur. Faisant abstraction de ces p sommets, opérons de même à l'égard des $n - p$ sommets qui restent : nous obtiendrons un second polygone convexe, intérieur au premier. Continuons ainsi jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 0, 1 ou 2 sommets. La figure aura été décomposée en polygones convexes intérieurs les uns aux autres, et la valeur de ε dépendra du nombre et de la nature de ces polygones, et en même temps de la disposition relative de leurs côtés, comme le montre la discussion des cas les plus simples, savoir $n = 4, 5$ ou 6.

Pour $n = 4$, on peut avoir : 1° un quadrilatère convexe, $\varepsilon = 0$;
2° un triangle avec un sommet à l'intérieur, $\varepsilon = 1$.

Pour $n = 5$, on peut avoir : 1° un pentagone convexe, $\varepsilon = 0$;
2° un quadrilatère convexe avec un sommet à l'intérieur, $\varepsilon = 2$ ⁽¹⁾ ;
3° un triangle avec deux sommets à l'intérieur, $\varepsilon = 4$.

Pour $n = 6$, on peut avoir : 1° un hexagone convexe, $\varepsilon = 0$;
2° un pentagone convexe avec un sommet à l'intérieur ; ε a pour valeur 3, 4 ou 5, suivant que ce sommet se trouve dans l'un des cinq triangles (délimités par les cinq diagonales du pentagone) qui s'appuient sur les côtés du pentagone, dans l'un des cinq autres triangles intercalés entre les précédents, ou dans la région centrale ; 3° un quadrilatère convexe avec deux sommets intérieurs,

(1) C'est la disposition que réalise la fig. 5.

$\varepsilon = 6, 7$ ou 8 , suivant la position de ces deux sommets dans les quatre triangles délimités par les diagonales du quadrilatère ; 4^o un triangle extérieur renfermant un second triangle, $\varepsilon = 9, 10, 11$ ou 12 , suivant l'orientation des côtés du petit triangle par rapport à ceux du grand : la valeur maxima $\varepsilon = 12$ se présente si, par exemple, les deux triangles sont semblables et semblablement placés, et la valeur $\varepsilon = 9$ s'ils sont semblables, mais inversement placés, c'est-à-dire orientés à 180^o de différence.

Pour $n > 6$, on pourrait établir une classification analogue, mais la complication croîtrait naturellement avec une grande rapidité à mesure que n augmenterait. Toutefois l'analogie porte à supposer que, quel que soit n , la valeur maxima de ε doit correspondre à la répartition des sommets en triangles successifs intérieurs les uns aux autres, plus $0, 1$ ou 2 sommets à l'intérieur du dernier, selon que n est de la forme $3k, 3k + 1, 3k + 2$.

10. Puisque, lorsqu'on fait croître n au delà de 5 , le nombre des régions d'aspect constant, et, par conséquent, *a fortiori*, le nombre des aspects réalisables ne croît que très lentement par rapport au nombre des aspects imaginables, il est intéressant de rechercher quels sont, parmi les aspects imaginables, ceux qui sont effectivement réalisables ; comment ils se groupent d'après la disposition relative des sommets, quelle condition doit être remplie pour qu'un même aspect se reproduise dans deux ou un plus grand nombre de régions distinctes, etc. Il y a là toute une série de questions dont la solution paraît assez difficile ; voici quelques propositions et remarques qui pourront servir de point de départ à ceux qui désireraient pousser plus loin l'étude du problème des aspects.

Considérons une droite mobile, qui balaye tout le plan en restant constamment parallèle à elle-même. Lorsqu'elle se trouve à une distance assez grande du groupe des n sommets pour laisser d'un même côté non seulement tous les sommets, mais encore tous les *nœuds* extérieurs, elle traverse $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ régions. Supposons que les sommets soient numérotés de 1 à n précisément dans l'ordre où cette droite mobile les rencontrera en se déplaçant ; et supposons, pour fixer les idées, que cette droite parte de la partie su-

périeure de la figure, et que chaque aspect soit défini par l'ordre dans lequel les sommets sont vus en faisant le tour d'horizon de gauche à droite.

Alors, pour la première région que recoupe la droite mobile dans sa position initiale, région qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur de gauche de la figure, l'aspect est

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n.$$

La région immédiatement contiguë que l'on rencontre en suivant la droite mobile est séparée de la première par une des droites du système, laquelle passe nécessairement par deux sommets dont les numéros se suivent; par exemple, par 3 et 4; et la traversée de cette droite a évidemment pour effet d'intervertir dans l'aspect l'ordre des sommets 3 et 4. L'aspect, pour la deuxième région, sera donc

$$1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 5 \ 6 \ \dots \ n.$$

Si, de même, on rencontre ensuite la droite qui joint les sommets 3 et 5, l'aspect, pour la troisième région, sera

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ \dots \ n,$$

et ainsi de suite. Comme on doit nécessairement rencontrer toutes les droites du système, et que d'ailleurs, pour la dernière région, celle qui s'étend à l'infini dans l'angle supérieur *droit* de la figure, l'aspect est évidemment

$$n(n-1) \ \dots \ 4 \ 3 \ 2 \ 1.$$

il est clair que les aspects des $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ régions recoupées par la droite mobile dans sa position initiale se déduiront de l'aspect fondamental $1 \ 2 \ \dots \ n$, en appliquant à cet arrangement, une fois et une seule, chacune des permutations obtenues en combinant deux à deux les n nombres qui y figurent. L'ordre dans lequel ces permutations se présenteront n'est pas complètement arbitraire, puisque, pour passer d'un aspect au suivant, on ne peut permuter que deux nombres contigus; mais c'est la seule condition à remplir, comme il est facile de s'en assurer, car elle équivaut à cette condition géométrique, que trois permutations entre trois nombres pris au hasard et combinés deux à deux représen-

tent bien les trois côtés d'un triangle dont les sommets soient numérotés suivant la convention adoptée.

Prenons, comme exemple, le cas de $n = 5$, avec la disposition de sommets de la *fig. 2*, et supposons la droite mobile parallèle à la direction XY. Les sommets devront être numérotés comme suit : $S' = 1$, $A = 2$, $C = 3$, $A' = 4$, $S = 5$; et, d'après les inclinaisons relatives des diverses droites du système sur la direction XY, on aura, pour les aspects des onze régions initiales, le Tableau ci-dessous :

N° 1.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
1	1	.	.	.
.	.	5	3	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
5	4	.	.	.
.	.	.	2	1

Dans ce Tableau, tout point remplace le nombre immédiatement supérieur dans la même colonne verticale; ainsi l'aspect de la cinquième région doit être lu 1 4 3 5 2, et il ne diffère de celui de la quatrième que par la permutation 5-2, qui est mise en évidence. Comme on le voit, le Tableau comprend bien les dix permutations 1-2, 1-3, 1-4, ..., et se termine par l'aspect 5 4 3 2 1.

On peut se donner à volonté l'ordre de ces dix permutations en observant seulement la condition indiquée précédemment, et il sera possible de réaliser la figure géométrique correspondante.

II. Supposons donc qu'on se soit donné le Tableau ci-dessus. Je vais montrer qu'en le soumettant à un traitement méthodique on peut trouver, sans le secours de la figure géométrique correspondante, toutes les particularités que présente cette figure au point de vue du problème des aspects, c'est-à-dire le nombre et la position des nœuds, et écrire tous les aspects correspondant aux différentes régions. La démonstration sera donnée pour $n = 5$, mais elle est absolument générale.

Faisons marcher la droite mobile. Tant qu'elle ne rencontrera ni nœud ni sommet, les régions qu'elle recoupe resteront les mêmes. A la rencontre d'un nœud, qu'arrive-t-il? Les deux permutations qui représentent les deux droites passant par ce nœud ne feront que se transposer. Mais, pour pouvoir se transposer, il faut évidemment qu'elles se suivent sur le Tableau; de plus, deux droites qui se coupent en un nœud ne peuvent passer par un même sommet: donc deux permutations du Tableau ne peuvent se transposer que si elles n'ont pas de nombre commun, c'est-à-dire si elles occupent des colonnes verticales distinctes; par exemple, 4-1 et 5-3 remplissent les conditions voulues pour pouvoir se transposer, de même 3-1 et 5-4, de même 4-1 et 5-2, etc.

Lorsque la droite mobile arrive au sommet n° 1, il est clair que toutes les droites dont les permutations contiennent le chiffre 1 s'arrêtent à ce sommet; ces permutations doivent donc toutes disparaître du Tableau.

Mais au moment où la droite mobile est infiniment près du sommet 1, les quatre droites 1-2, 1-3, 1-4, 1-5 forment un faisceau de droites infiniment voisines; il faut donc que préalablement on ait rencontré les deux nœuds correspondant aux transpositions de 4-1 avec 5-3, et de 5-4 avec 2-1, de telle sorte que le Tableau ait pris l'aspect ci-dessous :

N° 2.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
4	1	.	.	.
.	5	1	.	.
.	.	3	1	.
.	.	.	2	1
5	4	.	.	.

ce qui a introduit deux nouvelles régions, avec les aspects nouveaux 1 4 5 3 2, 4 5 3 2 1.

Les choses étant ainsi préparées, faisons franchir à la droite mobile le sommet n° 1 : elle ne recoupera plus que

$$\frac{n(n-1)}{2} - 1 = (n-1).$$

soit sept régions dont les aspects s'obtiendront en supprimant du Tableau n° 2 les permutations contenant le chiffre 1; ce qui donne le Tableau n° 3 ci-dessous :

N° 3.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
.	4	2	.	.
.	.	3	2	.
.	.	.	5	2
.	.	5	3	.
.	5	4	.	.

Ici toutes les permutations contenant le chiffre 2 se trouvent contiguës; la droite mobile ne croisera donc pas de nœuds avant d'arriver au sommet 2. En franchissant ce sommet, il faudra supprimer 2-3, 2-4, 2-5, et introduire à la place 1-2, puisque le second segment extérieur de cette droite reparait évidemment; ce qui donne le Tableau n° 4 :

N° 4.

1	2	3	4	5
.	.	4	3	.
2	1	.	.	.
.	.	.	5	3
.	.	5	4	.

Avant d'arriver au sommet n° 3, il faut grouper les permutations 3-4 et 3-5, qui devront être supprimées en franchissant ce sommet et remplacées par 1-3 et 2-3. Mais il semble qu'il y ait indétermination, puisqu'on peut faire ce groupement soit en transposant 2-1 et 4-3, soit en transposant 2-1 et 5-3. Il n'en est cependant rien, parce que nous devons arriver, en dernier résultat, à un Tableau qui reproduira le Tableau n° 1 renversé, c'est-à-dire avec les mêmes permutations, mais se présentant dans l'ordre inverse; en sorte que nous devons avoir les trois permutations 1-2, 1-3 et 2-3, dans cet ordre précisément et non dans tout autre, ce qui ne peut être obtenu qu'en faisant d'abord la transposition de 4-3 avec 1-2, et introduisant ensuite 1-3 et 2-3. Nous avons donc un nœud qui fournit l'aspect nouveau 2 1 4 3 5, puis, après avoir franchi le sommet n° 3, nous formons le Tableau n° 5 :

N° 5.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	.	5	4

On verrait de même que le passage du sommet du n° 4 conduit au Tableau n° 6 :

N° 6.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
3	2	.	.	.
.	.	4	1	.
.	4	2	.	.
4	3	.	.	.

puisque le passage du sommet n° 5 exige que l'on intercale les permutations 1-5, 2-5, 3-5, 4-5 à l'endroit marqué ci-dessus par une ligne transversale, ce qui donne le Tableau n° 7 :

N° 7.

1	2	3	4	5
2	1	.	.	.
.	3	1	.	.
.	.	.	5	4
.	.	5	1	.
.	5	3	.	.
5	2	.	.	.
.	3	2	.	.
.	.	.	4	1
.	.	4	2	.
.	4	3	.	.

et qu'enfin, pour obtenir le Tableau inverse du n° 1, il ne reste plus qu'à transposer 3-1 avec 5-4, 4-1 avec 3-2 et avec 5-2.

Nous avons donc ainsi rencontré en tout six nœuds, savoir deux avant le sommet n° 1, un entre le sommet n° 2 et le sommet n° 3, et les trois derniers après le sommet n° 5. Ces diverses circonstances se présentent, en effet, sur la *fig.* 2, si ce n'est que le nœud M' se présente entre le sommet n° 4 et le sommet n° 5 ; et, en effet, la transposition de 3-2 avec 4-1 pouvait aussi bien se

faire sur le Tableau n° 6 que sur celui n° 7, et aurait pu être reconnue comme nécessaire dès que le Tableau n° 6 était formé : à quelque moment que cette transposition soit effectuée, elle donne d'ailleurs toujours le même aspect nouveau 2 3 4 1 5 ou 5 2 3 4 1, ce qui est identique, d'après la définition de l'aspect (1).

On peut remarquer que lorsque la droite mobile a franchi p des n sommets, le nombre des régions qu'elle traverse est devenu

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 - [(n-1) + (n-3) + (n-5) + \dots + (n-2p+1)],$$

c'est-à-dire

$$\frac{p(p-1) + (n-p)(n-p-1)}{2} + 1,$$

et que le nombre total des régions rencontrées par elle depuis l'origine de son mouvement jusques et y compris sa position actuelle est

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 + [-1 + 0 + 1 + 2 + \dots + (p-2)] + \delta_p,$$

en appelant δ_p le nombre des nœuds qu'elle a successivement rencontrés, c'est-à-dire

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{p(p-3)}{2} + 1 = \delta_p,$$

ce qui donne pour le nombre total des régions du plan, en faisant $p = n$ et $\delta_p = \delta$,

$$(n-1)^2 + \delta,$$

comme nous l'avons trouvé par une autre méthode.

11. « Une droite quelconque rencontre au plus deux régions distinctes donnant un même aspect déterminé, et, dans ce cas, tous les sommets sont situés d'un même côté de cette droite. »

(1) L'indétermination qui se présente ici pour la transposition de 1-3 avec 1-4 signifie, au point de vue géométrique, que le nœud M' peut se trouver plus près ou plus loin de XY que le sommet S, suivant la position de G, tout le reste de la figure étant invariable.

Considérons, en effet, la droite mobile dans une de ses positions; et formons, avec la notation précédemment indiquée, le tableau des aspects pour les diverses régions qu'elle recoupe; si deux de ces régions ont un même aspect, on devra rencontrer dans le Tableau les deux aspects

AB,

BA,

A désignant un groupe de sommets dans un certain ordre, et B les autres sommets, également dans un certain ordre. Pour passer de AB à BA, il faut nécessairement rencontrer toutes les permutations qui s'obtiennent en combinant chacun des sommets du groupe A avec chacun des sommets du groupe B, mais il faut aussi ne rencontrer *aucune* des permutations où figurent deux sommets appartenant au même groupe. Donc tous les sommets du groupe B sont situés du même côté de la droite que *chacun* des sommets du groupe A, ce qui exige que tous ceux-ci soient d'un même côté de la droite; et dès lors tous les sommets, tant du groupe B que du groupe A, seront situés de ce même côté.

Supposons maintenant que la droite recoupe trois régions de même aspect, on devra avoir les trois aspects

ABC,

BCA,

CAB.

ou encore ceux-ci :

ABC,

CAB,

BCA,

en désignant par A, B, C des groupes déterminés de sommets. Mais cela est impossible : car dans la première hypothèse les groupes A et B devraient permuer entre eux une première fois pour passer de ABC à BCA, puis une seconde fois pour passer de BCA à CAB, et l'on a vu que toute permutation ne peut être rencontrée qu'une fois.

La même chose aurait lieu, dans la seconde hypothèse, pour les groupes B et C; et elle aurait lieu *a fortiori*, si l'on supposait plus de trois régions de même aspect.

12. Quelque grand que soit n , on peut toujours faire en sorte que deux régions distinctes donnent un même aspect. Cela est presque évident à l'aspect du Tableau initial donné précédemment, car on peut disposer de l'ordre des permutations de manière à ne permuter tout d'abord qu'un sommet ou groupe de p sommets avec tous les autres; par exemple, écrire

1	2	3	4	5	6
.	.	.	.	6	5
.	.	.	6	4	.
.	.	6	3	.	.
.	6	2	.	.	.
6	1	.	.	.	.

et l'on voit que, pour $n = 6$, la sixième région donne le même aspect que la première. Mais on peut obtenir un résultat analogue pour deux régions aboutissant à deux sommets consécutifs du polygone convexe qui enveloppe tous les sommets du système. Soient 1 et 2 les numéros de ces sommets, et numérotons les autres dans l'ordre où ils se présentent, vus du sommet 1, quand on fait un demi-tour d'horizon, de gauche à droite à partir du sommet 2. L'aspect, pour un observateur placé au sommet 1, sera

$$2 \ 3 \ 4 \ \dots \ n,$$

et, pour chacune des n régions immédiatement contiguës au sommet 1, l'aspect s'obtiendra évidemment en intercalant le chiffre 1 successivement à chacune des n places possibles dans l'arrangement ci-dessus.

Soit demandé de reproduire l'un de ces aspects, par exemple

$$2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 6 \ \dots \ n.$$

dans l'une des régions immédiatement contiguës au sommet n° 2. Il suffira de faire en sorte que, de ce sommet n° 2 lui-même, l'aspect soit

$$5 \ 6 \ \dots \ n \ 3 \ 4 \ 1.$$

ce qui est toujours possible si l'on est maître de distribuer les n sommets à volonté, puisqu'il suffit de mener à partir du sommet n° 2 un faisceau de $n - 2$ droites et de prendre pour sommets,

dans l'ordre convenable, leurs intersections avec le faisceau émané du sommet 1.

Cela fait, il y aura une des régions contiguës au sommet 2 pour laquelle ce sommet viendra s'intercaler dans l'aspect 5 6 ... n 3 4 1, entre n et 3, et cette région sera celle qui répond à la question.

Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont tous les sommets sont sur la courbe; par M. WEILL.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale, et soit t la valeur du paramètre correspondant à un point A de la courbe; nous désignons, dans tout ce qui va suivre, un point de la courbe par le paramètre correspondant. Menons au point A la tangente qui rencontre la courbe, supposée de degré m , en $(m - 2)$ points $T_1 T_2 \dots T_{m-2}$.

Soit $f(T, t) = 0$ l'équation qui donne les valeurs T , et admettons que cette équation soit homogène en T et t . Menons en T_1 la tangente à la courbe, et soit θ l'un des points où elle rencontre la courbe, on aura $f(\theta, T_1) = 0$. Posons

$$\frac{T}{t} = z, \quad \frac{\theta}{T_1} = u.$$

Les $(m - 2)$ valeurs de u seront respectivement égales aux $(m - 2)$ valeurs de z ; on aura donc

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_1}{t},$$

ou bien

$$\frac{\theta}{T_1} = \frac{T_\alpha}{t}.$$

La première solution donne pour θ une valeur $\frac{T_1^2}{t}$ qui se distingue des autres et que nous laisserons de côté pour le moment. La deuxième solution donne $\theta = \frac{T_1 T_\alpha}{t}$ et montre que le point θ est à la rencontre des tangentes en T_1 et T_α ; donc les tangentes en tous

les points $T_1, T_2, \dots, T_{m-2}$ forment un polygone dont *tous les sommets* sont sur la courbe.

On voit de plus que ces points B sont représentés par les produits deux à deux de toutes les valeurs T, chaque produit étant divisé par t .

Ceci posé, la tangente en T_1 rencontre la courbe en $(m-2)$ points qui sont

$$\frac{T_1^2}{t}, \quad \frac{T_1 T_2}{t}, \quad \frac{T_1 T_3}{t}, \quad \dots, \quad \frac{T_1 T_{m-2}}{t}.$$

En ne considérant que les $(m-3)$ derniers points, menons en ces points les tangentes; elles se couperont mutuellement sur la courbe en des points C

$$\frac{T_1 T_2 T_3}{t^2}, \quad \frac{T_1 T_2 T_4}{t^2}, \quad \dots$$

Mais si l'on opère de même sur les tangentes en $T_2 T_3 \dots$, on aura sur la courbe un système de points C, chacun desquels sera le point de concours de *trois tangentes*, et tous ces points seront représentés par les produits trois à trois des quantités T, chaque produit étant divisé par t^2 . De même les tangentes en tous les points C se coupent quatre par quatre sur la courbe, et ainsi de suite; enfin on arrive à $(m-2)$ tangentes se coupant en un même point de la courbe, et ce point a pour paramètre $\frac{T_1 T_2 \dots T_{m-2}}{t^{m-3}}$, c'est-à-dire λt , λ étant une constante.

Inversement, si d'un point pris sur la courbe on mène les tangentes, au nombre de $(m-2)$, les droites qui joignent les points de contact deux à deux sont tangentes à la courbe en des points qui sont distribués trois par trois sur des droites; ces nouvelles droites touchent la courbe en des points qui sont distribués quatre par quatre sur des droites, et ainsi de suite; on arrive enfin à $(m-2)$ points situés sur une même tangente à la courbe. Prenons, par exemple, une courbe du sixième degré jouissant des propriétés énoncées: si d'un point de la courbe on lui mène les quatre tangentes, les six droites, obtenues en joignant deux à deux les points de contact, touchent la courbe en six points, qui sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés touchent la

courbe en quatre points, et ces quatre points sont sur une même tangente à la courbe.

Revenons au cas général. La tangente en T_1 rencontre la courbe en un point qui se distingue des autres et qui est $\frac{T_1^2}{t}$; soit β ce point. Chaque tangente en $T_1 T_2 \dots T_{m-2}$ fournira un point β . En l'un des points B menons la tangente; elle rencontrera la courbe en $(m-4)$ points C et en deux points que nous désignerons par γ et γ' , et qui seront, par exemple,

$$\frac{T_1 T_2^2}{t^2}, \quad \frac{T_2 T_6^2}{t^2}.$$

En général, si nous prenons sur la courbe un point où viennent converger P des tangentes que nous considérons, la tangente en ce point rencontrera la courbe en P points, ne faisant pas partie du système des points dont il est question, et qui, par conséquent, se distinguent de autres points de rencontre de cette tangente avec la courbe; ces points sont représentés par des valeurs du paramètre de la forme

$$\frac{T_1 T_2 T_3 \dots T_{p-1} T_p^2}{t^p};$$

plus simplement, on peut dire que ces P points s'obtiennent en multipliant la valeur θ du point où viennent converger P tangentes successivement par $\frac{T_1^2}{t}, \frac{T_2^2}{t}, \dots; T_1, T_2, \dots$ étant les facteurs du numérateur de θ .

En particulier, le point final, où viennent converger $(m-2)$ tangentes, a pour paramètre

$$\frac{T_1 T_2 \dots T_{m-2}}{t^{m-3}},$$

ou λt ; donc la tangente en ce point rencontre la courbe en $(m-2)$ points qui ont pour paramètres $\lambda T_1, \lambda T_2, \dots, \lambda T_{m-2}$, ce qui montre une correspondance bien simple entre le point initial et le point final; ce résultat peut se prévoir, car l'équation en z montre que, si t se change en λt , $T_1, T_2, \dots$ se changeront en $\lambda T_1, \lambda T_2, \dots$.

Des développements qui précèdent résulte le théorème suivant :

THÉOREME. — Si l'on mène en un point t d'une courbe unicursale la tangente qui rencontre la courbe en des points T , et que l'équation qui donne T en fonction de t soit homogène en T et t , les tangentes aux points T se coupent deux à deux en des points B de la courbe; les tangentes aux points B se coupent trois à trois en des points C de la courbe, et ainsi de suite. Si, d'un point de la courbe qui jouit des propriétés indiquées, on mène les tangentes, leurs points de contact sont deux à deux sur des droites tangentes à la courbe; les points de contact de ces nouvelles droites sont trois à trois sur des tangentes à la courbe, et ainsi de suite.

Une classe de courbes jouissant des propriétés énoncées est formée par toutes les courbes ayant une équation de la forme

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

α , β , γ désignant trois fonctions linéaires. Par une transformation homographique, on ramène cette équation à la forme simple

$$x = tp, \quad y = t^m.$$

L'équation en T et t est ici

$$T^m - m t^{m-p} T^p + (m-p) t^m = 0.$$

On peut toujours supposer m pair, si m et p sont de parité différente, et l'on a alors

$$T_1 T_2 \dots T_{m-2} = (m-p) t^{m-2};$$

done la constante désignée tout à l'heure par λ est ici égale à $(m-p)$. Par conséquent, si $(m-p)$ est égal à l'unité, le point final se confond avec le point initial. Dans ce cas particulier, la figure de géométrie formée par toutes les tangentes considérées, d'ailleurs imaginaires, est remarquable, en ce que, si l'on part de la tangente en un point de la courbe, ou des tangentes partant de ce point, on arrive, dans les deux cas, aux mêmes points et aux mêmes droites.

Considérons maintenant une courbe gauche ayant pour équations

$$x = tp, \quad y = tq, \quad z = r.$$

Il est facile de voir que si, en un point de cette courbe, on mène le plan osculateur, qui rencontre la courbe en des points T, l'équation en T et t est homogène, et, par conséquent, les propriétés énoncées plus haut s'appliquent. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si en un point de la courbe gauche, ayant pour équations $x = t^p$, $y = t^q$, $z = t^r$, on mène le plan osculateur, lequel rencontre la courbe en un certain nombre d'autres points, et si en ces points on mène les plans osculateurs, ils forment un polyèdre dont les arêtes rencontrent respectivement la courbe. Si, aux points où ces arêtes rencontrent la courbe, on mène les plans osculateurs, ils se couperont trois à trois sur la courbe, et ainsi de suite. L'équation en $\frac{T}{t}$ est ici, en posant $\frac{T}{t} = z$,*

$$(\bar{z}^p - 1)qr(q - r) + (\bar{z}^q - 1)rp(r - p) + (\bar{z}^r - 1)pq(p - q) = 0.$$

Dans tout ce qui précède, on s'est appuyé uniquement sur ce que l'équation en T et t était homogène. Dès lors, on peut remplacer la tangente à la courbe plane considérée d'abord par toute courbe déterminée quand le point de la courbe unicursale est donné, par exemple, par le cercle osculateur en ce point; on voit aisément comment on pourrait généraliser les propriétés précédentes, qui reposent sur une propriété analytique extrêmement simple.

M. Halphen me fait remarquer que l'équation considérée peut se présenter sous forme non homogène; il suffit qu'on puisse la ramener à être homogène par une transformation rationnelle du paramètre.

Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. E. LAQUIÈRE.

(Séance du 5 mai 1882.)

La Note de M. Laisant, insérée au *Bulletin* (t. X, n° 2, p. 40), rappelle un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, où

M. Resal étend aux polygones, plans ou gauches, le théorème de Pappus sur l'immobilité du centre de gravité de masses, égales entre elles, qui décrivent les côtés d'un triangle avec des vitesses de même sens et proportionnelles aux longueurs des côtés à parcourir, après être parties en même temps des sommets respectifs.

On pourrait donner à la généralisation du théorème de M. Resal la forme, d'apparence encore plus générale, suivante :

Si des masses partent en même temps des sommets d'un polygone fermé, plan ou gauche, pour en parcourir les côtés suivant une loi de mouvement identique, avec des vitesses à chaque instant proportionnelles aux côtés décrits, le centre de gravité du système des masses mobiles restera fixe.

L'observation sur le théorème de M. Resal, que j'ai faite dernièrement dans le Journal précité (3^e série, t. I, p. 110) s'applique à cette nouvelle généralisation que l'on peut, par une convenable distribution des masses, considérer quasi comme évidente.

M. Laisant, de son côté, démontre dans sa Note précitée que :

Si l'on considère un système de droites quelconques $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ dans l'espace et qu'on fasse tourner toutes ces droites, du même angle et dans le même sens, autour d'axes parallèles passant par leurs premières extrémités $A_1, A_2, \dots, A_n$, ce qui fait prendre aux secondes extrémités les nouvelles positions $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$;

Désignant par G_a, G_b, G_b' les centres de gravité de la série des points A , de celle des points B , de celle des points B' , affectés de masses quelconques, mais égales pour les trois points A_i, B_i et B'_i , de même indice :

Le centre de gravité $G_{b'}$ s'obtiendra par la rotation de G_b , du même angle et dans le même sens, autour d'un axe de rotation passant par G_a et parallèle aux premiers.

L'auteur, qui s'est imposé la tâche de divulguer en France la méthode des quaternions, donne de son théorème une élégante démonstration, basée sur ce genre de calcul. Toutefois, le théorème étant du domaine essentiel de la Mécanique rationnelle, nous ne croyons pas superflu d'observer qu'il est susceptible d'une démonstration immédiate et tout à fait élémentaire, par exemple

de la suivante, qui aurait probablement été choisie par Poinsot, si ce grand géomètre avait songé au théorème de M. Laisant.

Désignons par $(A, \omega)B$ le déplacement linéaire, sens et grandeur, du point B tournant de l'angle ω , valeur donnée en grandeur et en signe, autour de l'axe mené par le point A parallèlement à une direction fixe. Il est évident que

$$(A, \omega)B + (B, \omega)A = 0.$$

On voit de même que, d'une manière générale,

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B + (A, \omega)C,$$

ou bien

$$(A, \omega)B = (C, \omega)B - (C, \omega)A.$$

Par conséquent, dans le cas qui nous occupe,

$$BB' = (A, \omega)B = (G_a, \omega)B - (G_a, \omega)A.$$

Faisant la somme des n égalités semblables, appliquées aux n points B , et multipliées chacune par la masse m correspondante; considérant de plus que

$$(1) \quad \Sigma m(G_a, \omega)A = M(G_a, \omega)G_a = 0,$$

on obtient immédiatement

$$(2) \quad G_b G_{b'} = (G_a, \omega)G_b,$$

ce qui est le théorème général de M. Laisant.

Nota. — Les équations (1) et (2) ont été écrites suivant le mode usité dans le calcul des équipollences, les déplacements qui y figurent étant des droites géométriques. Pour conserver l'écriture vulgaire, il suffirait de considérer ces deux équations comme existant entre les projections de ces lignes sur un axe quelconque.

Sur la relation qui existe entre le problème de la Trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. STEPHANOS.

(Séance du 5 mai 1882.)

Depuis que les propriétés métriques des figures sont considérées, d'après Chasles, comme correspondant à des relations projectives de ces figures au cercle à l'infini sur la sphère, et que l'on est parvenu à obtenir les définitions projectives des diverses notions métriques, le problème de la Trigonométrie sphérique, problème qui revient à la détermination des relations qui lient les côtés d'un triangle sphérique à ceux de son triangle polaire, s'est montré comme équivalent à la recherche des relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par une conique C^2 sur les côtés de deux triangles de son plan, polaires réciproques par rapport à cette conique.

Dans la présente Note, je fais remarquer comment on peut ramener ce nouveau problème à la théorie du système simultané de trois formes binaires quadratiques et tirer de là les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

I. Supposons que l'on ait attribué d'une manière uniforme les valeurs d'un paramètre x_1, x_2 aux divers points d'une conique C^2 . A chaque droite du plan de cette conique sera ainsi attachée une forme binaire, quadratique en x_1, x_2 , ayant pour zéros les paramètres des points de rencontre de la conique avec la droite.

En partant des propriétés des formes attachées de cette façon à plusieurs droites du plan de la conique C^2 , on peut, comme on sait, retrouver toutes les relations projectives de ce système de droites à la conique C^2 . Il doit donc y avoir moyen d'exprimer les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés a, b, c d'un triangle, en fonction des invariants du système simultané des trois formes quadratiques

$$a_{x'}^2, \quad b_{x'}^2, \quad c_{x'}^2$$

où

$$a_{x'}^2 = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2, \quad b_{x'}^2 = b_0 x_1^2 + \dots, \quad c_{x'}^2 = c_0 x_1^2 + \dots,$$

respectivement attachées aux trois droites a, b, c .

Cela étant, pour avoir les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés l, m, n du triangle polaire réciproque de abc , il suffira de connaître les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 attachées aux côtés de ce nouveau triangle.

Or, en supposant que la droite l soit la polaire du point commun aux droites b et c , on remarque que la forme l_x^2 doit coïncider avec la jacobienne

$$(bc)b_x c_x = (b_0 c_1 - b_1 c_0)x_1^2 + (b_0 c_2 - b_2 c_0)x_1 x_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)x_2^2,$$

des deux formes b_x^2 et c_x^2 . Les formes attachées aux trois droites l, m, n doivent ainsi être égales à

$$l_x^2 = (bc)b_x c_x, \quad m_x^2 = (ca)c_x a_x, \quad n_x^2 = (ab)a_x b_x.$$

Les relations qui existent entre les rapports anharmoniques déterminés par la conique C^2 sur les côtés des deux triangles abc et lmn pourront donc être déduites de celles qui relient les invariants du système des formes a_x^2, b_x^2, c_x^2 à ceux du système covariant l_x^2, m_x^2, n_x^2 .

On parvient ainsi à ce résultat :

Les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique correspondent aux relations qui lient les invariants simultanés du système de formes binaires

$$a_x^2, \quad b_x^2, \quad c_x^2$$

à ceux du système covariant

$$(1) \quad l_x^2 = (bc)b_x c_x, \quad m_x^2 = (ca)c_x a_x, \quad n_x^2 = (ab)a_x b_x.$$

Nous allons indiquer tout de suite comment on peut passer effectivement de l'un de ces systèmes de formules à l'autre.

II. Soient α, β, γ les côtés d'un triangle sphérique; λ, μ, ν ceux de son triangle polaire. Soient aussi a, b, c et l, m, n les traces sur le plan à l'infini des plans qui portent respectivement les arcs α, β, γ et λ, μ, ν ; et supposons que les couples de points suivant lesquels le cercle à l'infini sur la sphère est coupé par les droites a, b, c et l, m, n soient représentés respectivement par les formes binaires a_x^2, b_x^2, c_x^2 et l_x^2, m_x^2, n_x^2 , liées entre elles par les relations (1).

Les invariants du système simultané a_x^2, b_x^2, c_x^2 sont, comme on sait,

$$\begin{aligned} D_{11} &= (aa')^2 = 2(a_0a_2 - a_1^2), & D_{22} &= (bb')^2, & D_{33} &= (cc')^2, \\ D_{23} &= (bc')^2 = b_0c_2 - 2b_1c_1 + b_2c_0, & D_{31} &= (ca')^2, & D_{12} &= (ab')^2, \end{aligned}$$

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

De même les invariants du système l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont :

$$d_{11} = (ll')^2, \quad d_{22} = (mm')^2, \quad d_{33} = (nn')^2, \quad d_{23} = (mn')^2, \quad \dots,$$

$$r = \begin{vmatrix} l_0 & m_0 & n_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Mais, comme les formes l_x^2, m_x^2, n_x^2 sont liées à a_x^2, b_x^2, c_x^2 par les relations (1), on doit avoir

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad \left\{ \begin{aligned} d_{11} &= \frac{1}{2}(D_{22}D_{33} - D_{23}^2), \dots, d_{23} = \frac{1}{2}(D_{31}D_{12} - D_{11}D_{13}), \dots, \\ r &= R^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix}, \\ R^2 D_{11} &= 2(d_{22}d_{33} - d_{23}^2), \dots, R^2 D_{23} = 2(d_{31}d_{12} - d_{11}d_{13}), \dots, \\ o &= D_{11}d_{21} + D_{12}d_{22} + D_{13}d_{23}, \quad o = D_{11}d_{31} + D_{12}d_{32} + D_{13}d_{33}, \dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

Maintenant les formules, essentielles pour notre but, qui permettent de passer des relations précédentes, bien connues, aux formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (3) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{D_{21}}{\sqrt{D_{22}D_{33}}}, \quad \cos \beta = \frac{D_{31}}{\sqrt{D_{33}D_{11}}}, \quad \cos \gamma = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}D_{22}}}, \\ \sin \alpha &= \sqrt{\frac{2d_{11}}{D_{22}D_{33}}}, \quad \dots, \\ \cos \lambda &= \frac{d_{23}}{\sqrt{d_{22}d_{33}}}, \quad \cos \mu = \frac{d_{31}}{\sqrt{d_{33}d_{11}}}, \quad \cos \nu = \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}d_{22}}}, \\ \sin \lambda &= \pm R \sqrt{\frac{1}{2} \frac{D_{11}}{d_{22}d_{33}}}, \quad \dots \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

(où ε doit être pris égal à $+1$ ou à -1 , suivant que R est positif ou négatif).

Dans ces formules, nous avons supposé : 1° que les formes a_x^2 , b_x^2 , c_x^2 ont été préparées de telle manière que l'on ait pour $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ des valeurs avec des signes voulus; 2° que les angles α , β , γ , et par conséquent aussi les angles λ , μ , ν ne sont point supérieurs à π . Si l'angle α (β ou γ) devait être plus grand que π , il faudrait faire précéder partout le radical $\sqrt{d_{11}}$ ($\sqrt{d_{22}}$ ou $\sqrt{d_{33}}$) du signe —.

La manière dont on peut tirer des relations (2) et (3) les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique n'offre aucune particularité notable.

Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. WEILL.

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale d'ordre p définie par les équations

$$x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots(t-\zeta)}, \quad y = \frac{f_1(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots}.$$

Soit un système de courbes de degré m dont l'équation contient un paramètre variable λ au degré k . Nous nous proposons de trouver le lieu du centre des moyennes distances des sommets du polygone formé par les points communs à la courbe variable et à la courbe fixe.

L'équation de la courbe variable étant

$$(1) \quad \lambda^k S_m + \lambda^{k-1} S_{1m} + \dots + S_m = 0,$$

les valeurs du paramètre t correspondant aux points considérés satisferont à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1), x et y par leurs valeurs en fonction de t , équation qui sera de la forme

$$(2) \quad \lambda^k \varphi_{m_p}(t) + \dots = 0.$$

Les abscisses des points communs seront données par les relations

$$\begin{aligned}x_1 &= A + \frac{B}{t_1 - \alpha} + \frac{C}{t_1 - \beta} + \dots + \frac{L}{t_1 - \gamma_2}, \\x_2 &= A + \frac{B}{t_2 - \alpha} + \dots, \\&\dots\dots\dots, \\x_{m_\varphi} &= A + \frac{B}{t_{m_\varphi} - \alpha} + \dots\end{aligned}$$

Si donc on désigne par X l'abscisse du centre des moyennes distances, on aura

$$m_\varphi X = m_\varphi A + B \sum_1^{m_\varphi} \frac{1}{t - \alpha} + C \sum_1^{m_\varphi} \frac{1}{t - \beta} + \dots,$$

ou bien

$$m_\varphi X = A + B \frac{\lambda^k \varphi'_{m_\varphi}(\alpha) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_\varphi}(\alpha) + \dots} + C \frac{\lambda^k \varphi'_{m_\varphi}(\beta) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_\varphi}(\beta) + \dots} + \dots$$

On trouve pour Y une expression analogue, et l'on conclut de là que le centre des moyennes distances décrit une courbe unicursale de degré φk ; soit λ_1 une racine de l'équation

$$\lambda^k \varphi_{m_\varphi}(\alpha) + \dots = 0.$$

Pour $\lambda = \lambda_1$, X et Y deviennent infinis, et le rapport $\frac{Y}{X}$ est égal à $\frac{B_1}{B}$: donc les asymptotes de la courbe sont parallèles à celles de la courbe unicursale donnée, et chaque direction asymptotique de la courbe unicursale est une direction asymptotique multiple d'ordre k du lien cherché.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à une courbe unicursale fixe d'ordre φ et à un système de courbes d'ordre m , dont l'équation contient un paramètre variable au degré k , est une courbe unicursale d'ordre φk , ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre k les directions asymptotiques de la courbe unicursale.*

Il faut remarquer que le degré du lien ne dépend pas de m . Le théorème précédent donne lieu à un grand nombre de résultats par-

ticuliers; l'un des plus intéressants est celui où l'on a $k=1$: alors le système des courbes variables forme un faisceau, et le lieu λ est une courbe d'ordre 2, ayant mêmes directions asymptotiques que la courbe unicursale.

En particulier, considérons une conique fixe et un polygone variable inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe. Si l'on appelle t le paramètre définissant un sommet du polygone, nous avons établi que les m valeurs de t correspondant à l'un des polygones satisfaisaient à une équation de degré m dont les coefficients sont des fonctions linéaires d'un paramètre λ , la variation de ce paramètre correspondant au déplacement continu de ce polygone; dès lors les calculs et les résultats sont applicables, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixe est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit.*

On en conclut, en particulier, que si un polygone se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique, le centre des moyennes distances des sommets décrit un cercle; ce cercle se réduit à un point lorsque la conique à laquelle le polygone est circonscrit a l'un de ses foyers au centre du cercle dans lequel le polygone est inscrit.

Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs; par M. PERRIN.

(Séance du 19 mai 1882.)

1. La résolution de l'équation du troisième degré, privée de son second terme

$$(1) \quad x^3 + px + q = 0,$$

peut être considérée comme se déduisant immédiatement de

Pour que cette relation soit identique, c'est-à-dire vraie, quelles que soient les valeurs de a, b, c , il est nécessaire et suffisant de faire en sorte que les coefficients de a^4, a^3b, a^2b^2, a^2bc soient nuls; car, en vertu de la symétrie, tous les autres termes disparaîtront aussi d'eux-mêmes. Mais, pour annuler ces quatre coefficients, nous disposons précisément de quatre indéterminées λ, μ, ν, ρ . Écrivant donc que les quatre coefficients dont il s'agit sont nuls, nous avons, pour déterminer λ, μ, ν, ρ , les quatre équations

$$\begin{aligned} a^4 & \dots\dots\dots 1 + \lambda + \nu = 0, \\ a^3b & \dots\dots\dots 4 + 2\lambda = 0, \\ a^2b^2 & \dots\dots\dots 6 + 2\lambda + 2\nu + \rho = 0, \\ a^2bc & \dots\dots\dots 12 + 2\lambda + \mu = 0, \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$\lambda = -2, \quad \mu = -8, \quad \nu = 1, \quad \rho = -4,$$

ce qui donne, pour l'identité cherchée,

$$(6) \quad \begin{cases} (a+b+c)^4 - 2\Sigma a^2(a+b+c)^2 \\ - 8abc(a+b+c) + (\Sigma a^2)^2 - 4\Sigma a^2b^2 = 0. \end{cases}$$

Il ne reste plus dès lors qu'à identifier les premiers membres de (3) et de (6) en posant

$$x = a + b + c, \quad p = -2\Sigma a^2, \quad q = -8abc, \quad r = (\Sigma a^2)^2 - 4\Sigma a^2b^2;$$

on en conclut

$$\Sigma a^2 = -\frac{p}{2}, \quad \Sigma a^2b^2 = \frac{p^2 - 4r}{16}, \quad abc = -\frac{q}{8}.$$

Si donc on prend pour a^2, b^2, c^2 les trois racines y_1, y_2, y_3 de la résolvante

$$(7) \quad y^3 + \frac{p}{2}y^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}y - \frac{q^2}{64} = 0,$$

$a + b + c$ ou $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}$ sera une racine de l'équation (3), pourvu que l'on ait associé les radicaux carrés avec les signes convenables pour que leur produit donne bien $-\frac{q}{8}$; ce qui fera disparaître l'ambiguïté provenant des doubles signes et fournira seulement les quatre racines.

La résolvante (7) est précisément, à un facteur constant près, celle que donne la méthode de Lagrange appliquée à la fonction suivante des racines de (3)

$$y = x_1 + x_2 - x_3 - x_4.$$

3. Si l'on pouvait, par un moyen quelconque, former pour les degrés supérieurs au quatrième des identités analogues à (2) et (6), on pourrait sans doute en déduire la résolution d'équations correspondantes. Or, il est facile de former de telles identités soit par la méthode des coefficients indéterminés que nous venons d'employer pour obtenir l'identité (6), soit d'une manière beaucoup plus simple en utilisant les formules bien connues qui donnent les fonctions symétriques des racines d'une équation exprimées au moyen des coefficients de cette équation. Soient en effet $a_1, a_2, \dots, a_n$, n quantités arbitraires; désignons par $x_1, x_2, \dots, x_n$ leur somme, la somme de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., jusqu'à leur produit $a_1 a_2 \dots a_n$. Désignons de même par $y_1, y_2, \dots, y_n$ la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ de ces quantités, la somme des produits deux à deux, trois à trois, etc., de ces puissances, la dernière quantité y_n étant par conséquent égale à x_n^m . On sait exprimer les $n-1$ quantités $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ en fonction entière de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Si entre ces $n-1$ relations on élimine $n-2$ des quantités $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, on obtiendra une relation qui ne contiendra plus que les y , avec x_n qui peut être remplacé par $\sqrt[m]{y_n}$, et celle que l'on voudra des quantités x , par exemple x_1 . On aura donc une identité homogène qui contiendra les diverses puissances de x_1 , c'est-à-dire de $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, multipliées par des fonctions symétriques des puissances $a_1^m, a_2^m, \dots, a_n^m$, et, si cette identité renferme x_1 à une puissance r supérieure à n , on pourra s'en servir pour ramener la résolution d'une certaine classe d'équations de degré r à la résolution d'une équation de degré n .

Si, en particulier, on suppose $n = 2$, $m = 3$, ce procédé donne immédiatement l'identité (2); si l'on fait $n = 3$, $m = 2$, il conduit à éliminer x_2 entre les deux relations

$$\begin{aligned} 1.1 &= x_1^2 = 2.x_2, \\ 1.2 &= x_2^2 = 2.x_1.x_3, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$x_1^4 - 2y_1x_1^2 - 8x_3x_1 + y_1^2 - 4y_2 = 0,$$

c'est-à-dire, en remplaçant respectivement x_1, x_3, y_1, y_2 par leurs valeurs $a + b + c, abc, a^2 + b^2 + c^2, a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$, précisément l'identité (6).

Au lieu d'éliminer x_2 , on aurait pu éliminer x_1 , ce qui aurait donné

$$x_2^4 - 2y_2x_2^2 - 8x_3^2x_2 + y_2^2 - 4y_1x_3^2 = 0,$$

et par conséquent l'identité

$$(8) \quad \begin{cases} (ab + ac + bc)^4 - 2\Sigma a^2b^2(ab + ac + bc)^2 \\ - 8a^2b^2c^2(ab + ac + bc) + (\Sigma a^2b^2)^2 - 4a^2b^2c^2\Sigma a^2 = 0. \end{cases}$$

En appliquant cette identité à la résolution de l'équation du quatrième degré (3), on aurait été conduit à la nouvelle résolvante que voici

$$z^3 + \frac{p^2 - 4r}{2q} z^2 - \frac{p}{2} z + \frac{q}{8} = 0.$$

Si z_1, z_2, z_3 sont ses trois racines, les quatre racines de (3) seront données par la formule

$$\pm \sqrt{z_1 z_2} \pm \sqrt{z_1 z_3} \pm \sqrt{z_2 z_3},$$

les signes étant choisis de manière que le produit des trois radicaux donne bien $-\frac{q}{8}$.

4. L'hypothèse $n = 3, m = 3$ conduit, quelle que soit la quantité x éliminée, à une identité qui n'offre aucun intérêt, parce que l'équation correspondante du neuvième degré se ramène immédiatement au troisième. Il en est de même pour le cas de $n = 2, m = 4$, où les identités qu'on obtient correspondent à des équations du huitième degré se ramenant immédiatement au quatrième.

Faisons encore $n = 2, m = 5$. Les formules de Newton donnent

$$y_1 = x_1^5 - 5x_1^3x_2 + 5x_1x_2^2,$$

d'où l'identité, d'ailleurs facile à établir directement,

$$(9) \quad (a + b)^5 - 5ab(a + b)^3 + 5a^2b^2(a + b) - (a^5 + b^5) = 0.$$

Comparons avec l'équation du cinquième degré privée de son second terme

$$(10) \quad x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

Pour identifier les premiers membres de (9) et (10), il faudra supposer $q = 0$, puis poser

$$\begin{aligned} -5ab &= p, \\ 5a^2b^2 &= r, \\ a^5 + b^5 &= -s; \end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si $p^2 = 5r$.

Si donc les coefficients de l'équation (10) satisfont à ces deux conditions, savoir

$$(11) \quad q = 0, \quad p^2 - 5r = 0,$$

elle admettra pour racine $a + b$, a^5 et b^5 étant les deux racines de

$$y^2 + sy - \frac{p^5}{5^5} = 0,$$

et ayant, par suite, pour valeurs

$$-\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}.$$

Si donc a , b sont respectivement deux valeurs des radicaux

$$\sqrt[5]{-\frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}}, \quad \sqrt[5]{-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} + \frac{p^5}{5^5}}},$$

choisies de manière que leur produit ab soit bien égal à $-\frac{p}{5}$, et si η est une racine cinquième de l'unité, autre que 1, les cinq racines de l'équation (10) seront évidemment

$$\begin{aligned} a &= b, \\ \eta a &= \eta^4 b, \\ \eta^2 a &= \eta^3 b, \\ \eta^3 a &= \eta^2 b, \\ \eta^4 a &= \eta b. \end{aligned}$$

Comme exemple simple d'équation du cinquième degré satisfaisant aux conditions (11), on peut citer celle qui donne

$x = \sin \frac{\varphi}{5}$ en fonction de $\sin \varphi = m$; cette équation est la suivante :

$$x^5 - \frac{5}{4} x^3 + \frac{5}{16} x - \frac{m}{16} = 0,$$

et l'expression générale de ses cinq racines est, par suite,

$$\frac{1}{2} \left\{ \sqrt[5]{m + \sqrt{m^2 - 1}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{m^2 - 1}} \right\},$$

d'après la formule donnée ci-dessus. Il est remarquable que, lorsque $-1 < m < 1$, les cinq racines soient toutes réelles, et que cependant la formule les donne compliquées d'imaginaires, comme la formule de Cardan pour le cas irréductible du troisième degré.

L'équation générale du cinquième degré ne peut être ramenée à satisfaire aux conditions (11), par une transformation de Tschirnaüs, qu'en résolvant trois équations simultanées du premier, du troisième et du quatrième degré; et, par une transformation linéaire, que s'il existe entre les invariants de la forme du cinquième degré, qui constitue le premier membre de l'équation, une certaine relation qu'il est facile de trouver. Désignons, suivant la notation de M. Salmon (*Leçons d'Algèbre supérieure*), par J, K, L les invariants fondamentaux du quatrième, du huitième et du douzième ordre; en supposant les relations (11) satisfaites et le coefficient de x^4 nul, ces invariants deviennent des fonctions de p et s ; en éliminant ces deux quantités entre les trois expressions obtenues, on trouve aisément la relation cherchée, qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$(12) \quad z(125 + 361z)^2 - 4(238z + 5\beta)^2 = 0,$$

z désignant l'invariant absolu $1 - \frac{128K}{J^2}$, qui s'annule quand la forme admet un facteur carré, et β l'invariant absolu $1 - \frac{2048L}{J^3}$, qui s'annule en même temps que le précédent lorsque la forme admet deux facteurs carrés. On voit que, si la condition (12) est satisfaite, l'un des invariants absolus z, β ne peut s'annuler sans l'autre; il existe donc zéro ou deux facteurs carrés, ce qui résulterait aussi de la discussion des valeurs données ci-dessus pour les cinq racines.

5. Les identités (2) et (9) ne sont que des cas particuliers de celle-ci,

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & (a+b)^m - mab(a+b)^{m-2} + m \frac{m-3}{1.2} a^2 b^2 (a+b)^{m-4} \\ & - m \frac{(m-4)(m-5)}{1.2.3} a^3 b^3 (a+b)^{m-6} \\ & + m \frac{(m-5)(m-6)(m-7)}{1.2.3.4} a^4 b^4 (a+b)^{m-8} - \dots - (a^m + b^m) = 0, \end{aligned} \right.$$

dont il est aisé de vérifier l'exactitude en s'assurant que, si elle est vraie pour $m = p-1$ et $m = p$, elle l'est aussi pour $m = p+1$.

Au moyen de cette identité (13), on peut évidemment obtenir l'expression des m racines de toute équation de degré impair ne contenant que les puissances impaires de l'inconnue, et dans laquelle les coefficients de ces puissances ne dépendent que d'un seul paramètre, en vertu de $\frac{m-3}{2}$ relations qu'il est facile d'écrire, à l'inspection de l'identité (13), sous la forme abrégée

$$(14) \quad p_{2k} = \frac{(m-k-1)(m-k-2)\dots(m-2k+1)}{1.2\dots k.m} p_2^k,$$

où p_{2k} est le coefficient de x^{m-2k} , le terme indépendant restant d'ailleurs tout à fait arbitraire.

En se plaçant à ce point de vue, la formule de Cardan apparaît comme la première d'une série indéfinie de formules semblables, qui s'appliquent à une série de groupes d'équations de tous les degrés impairs; pour chaque degré m , le groupe d'équations résolubles par cette formule est défini par $m-1$ équations de condition entre les invariants de la forme de degré m . Pour $m=3$, ce groupe comprend donc la totalité des équations de ce degré, et la formule donne la résolution de l'équation générale; pour $m>3$, il ne comprend plus qu'un groupe spécial d'équations du degré considéré, et d'autant plus spécial que ce degré est lui-même plus élevé.

Sur les intégrales définies uniformément convergentes;
par M. SELIVANOFF.

(Séances du 19 mai et du 2 juin 1882.)

Supposons que la fonction $f(x, z)$ reste finie et continue entre les limites de l'intégration, lorsqu'on donne à x les valeurs contenues dans un certain contour et que l'intégrale soit finie et déterminée.

La fonction

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x, z) dz$$

n'est plus une fonction continue, et généralement l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \int_a^x \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz$$

est en défaut.

En effet, supposons que, pour toutes les valeurs de z entre a et b , la fonction soit décomposable de la manière suivante :

$$f(x+h, z) = f(x, z) + h\varphi(x, z) + h\psi(h, z),$$

$\psi(h, z)$ s'annulant pour $h = 0$.

La fonction $\varphi(x, z)$ est alors la dérivée de $f(x, z)$ par rapport à x .

En intégrant, on aura

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) &= \int_a^b f(x+h, z) dz \\ &= \int_a^b f(x, z) dz + h \int_a^b \varphi(x, z) dz + h \int_a^b \psi(h, z) dz. \end{aligned}$$

Pour que l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x, z) dz = \int_a^b \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz$$

soit la dérivée de $\Phi(x)$, il faut et il suffit que

$$\int_a^b \psi(h, z) dz = (b-a)\psi(h, \zeta)$$

s'annule pour $h = 0$.

Cette condition sera évidemment satisfaite dans le cas où a et b sont finis et $\psi(0, z) = 0$, pour toutes les valeurs de z entre a et b .

Si la fonction $\psi(h, z)$ a la forme $h\psi_1(h, z)$, la condition à laquelle elle est soumise sera satisfaite pourvu que $\psi_1(0, z)$ reste finie entre les limites d'intégration.

Si la fonction $f(x, z)$ a deux dérivées par rapport à x , on peut écrire, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x+h, z) = f(x, z) + hf'(x, z) + \frac{h^2}{1.2} f''(x+\theta h, z).$$

$f''(x, z)$ sera finie, si $f(x, z)$ et $f'(x, z)$ restent finies et continues pour toutes les valeurs de z entre a et b .

Nous avons donc le théorème :

On peut différencier sous le signe $\int$ l'intégrale

$$\int_a^b f(x, z) dz,$$

ayant ses limites finies, si la fonction $f(x, z)$ et sa première dérivée restent finies et continues entre les limites d'intégration et si la deuxième dérivée existe.

Nous nous proposons la question : *Peut-on, dans certains cas, différencier sous le signe, si une des limites d'intégration est infinie?* La proposition précédente est en défaut et il faut trouver un autre moyen de résoudre la question.

Les mêmes difficultés subsistent pour les séries. Chacun des termes de la série est une fonction continue de la variable ; il n'en est pas toujours de même pour la série. La dérivée de la série n'est pas toujours égale à la somme des dérivées de ses termes.

Il y a cependant une classe de séries infinies qui offre une certaine analogie avec les fonctions rationnelles. Ce sont les séries *uniformément convergentes*, ainsi qu'a démontré M. Weierstrass dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* du mois d'août 1880. (Voir la traduction française de ce Mémoire dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux, avril 1881, p. 161-164.)

La méthode de M. Weierstrass, appliquée aux intégrales définies, donne le moyen de résoudre notre question.

1. L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x, z) dz$$

est dite *uniformément convergente* si, pour toutes les valeurs de x contenues dans l'intérieur d'un certain contour, on peut déterminer un nombre p tel, qu'en prenant $m \geq p$ on ait

$$\text{mod} \int_m^x f(x, z) dz < k,$$

k étant une quantité aussi petite qu'on voudra, et donnée d'avance.

Considérons la différence

$$\Phi(x+h) - \Phi(x).$$

En partageant l'intégrale en deux parties, nous aurons

$$\begin{aligned} \Phi(x+h) - \Phi(x) &= \int_a^m [f(x+h, z) - f(x, z)] dz \\ &+ \left[\int_m^x f(x+h, z) dz - \int_m^x f(x, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme est infiniment petit avec h , car il est égal à

$$(m-a)[f(x+h, \zeta) - f(x, \zeta)],$$

ζ étant compris entre a et m .

Si les quantités x et $x+h$ sont contenues dans le contour de convergence uniforme, on a pour le second terme

$$\left| \int_m^x f(x+h, z) dz - \int_m^x f(x, z) dz \right| < 2k^{(1)}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

Si l'intégrale est uniformément convergente, elle est une fonction continue, pour les valeurs du paramètre contenues dans le contour de convergence uniforme.

(¹) Le signe $| |$ désigne, d'après M. Weierstrass, le module.

2. Supposons que, pour toutes les valeurs de z plus grandes que a , on ait le développement

$$f(x, z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)x + \varphi_2(z)x^2 + \dots + \varphi_n(z)x^n + \dots$$

Si, pour $|x| = r$,

$$|f(x, z)| \leq g,$$

g étant une fonction de z finie pour $z > a$, on a, d'après une proposition connue,

$$|\varphi_n(z)| \leq g r^{-n}.$$

En se fondant sur ce théorème, nous avons, pour $|x| = r_1 < r$,

$$\begin{aligned} |R_n| &= |\varphi_n(z)x^n + \varphi_{n+1}(z)x^{n+1} + \varphi_{n+2}(z)x^{n+2} + \dots| \\ &\leq g \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \left[1 + \frac{r_1}{r} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \dots\right], \end{aligned}$$

ou

$$|R_n| \leq \frac{g}{1 - \frac{r_1}{r}} \cdot \left(\frac{r_1}{r}\right)^n.$$

On voit que, pour toutes les valeurs de x dont le module est $< r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, z) = 0.$$

En intégrant depuis a jusqu'à m , on trouve

$$\begin{aligned} &\int_a^m f(x, z) dz \\ &= \int_a^m \varphi_0(z) dz + x \int_a^m \varphi_1(z) dz + \dots \\ &\quad + x^{n-1} \int_a^m \varphi_{n-1}(z) dz + \int_a^m R_n(x, z) dz. \end{aligned}$$

Le terme complémentaire a pour limite zéro quand m croît indéfiniment, comme on le voit facilement d'après la valeur moyenne de cette intégrale, à savoir

$$(m - a)R_n(x, \xi).$$

Mais il est indispensable que m soit fini et que $|x| < r$.

Sous ces conditions, l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, z) dz$$

est développable suivant les puissances croissantes de x .

Nous allons démontrer que la même proposition a lieu pour l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x, z) dz,$$

si elle est uniformément convergente, pour $|x| \leq r$.

Supposons que

$$\left| \int_m^\infty f(x, z) dz \right| \leq k, \quad |x| \text{ étant } \leq r.$$

En prenant un nombre m' plus grand que m , mais fini, nous avons

$$\begin{aligned} \int_m^{m'} f(x, z) dz \\ = \int_m^{m'} \varphi_0(z) dz = x \int_m^{m'} \varphi_1(z) dz + \dots + x^n \int_m^{m'} \varphi_n(z) dz + \dots \end{aligned}$$

Pour $|x| = r$, nous aurons *a fortiori*

$$\left| \int_m^{m'} f(x, z) dz \right| = k,$$

et, d'après le théorème déjà mentionné,

$$\left| \int_m^{m'} \varphi_n(z) dz \right| \leq kr^{-n}.$$

Rien n'oblige maintenant à laisser m' fini, puisque la seconde partie est indépendante de m' .

Nous avons donc

$$\left| \int_m^\infty \varphi_n(z) dz \right| \leq kr^{-n};$$

l'intégrale

$$\int_a^\infty \varphi_n(z) dz$$

est par conséquent finie.

Il ne reste plus que quelques mots pour achever la démonstration.

Faisons la différence

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\infty} f(x, z) dz - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^{\infty} \varphi_n(z) dz \\ &= \int_m^{\infty} f(x, z) dz - \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_m^{\infty} \varphi_n(z) dz, \end{aligned}$$

puisque nous avons déjà démontré que

$$\int_a^m f(x, z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^m \varphi_n(z) dz.$$

Posons $|x| = r_1 < r$,

$$|S| \leq \left| \int_m^{\infty} f(x, z) dz \right| + \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n \left| \int_m^{\infty} \varphi_n(z) dz \right|,$$

ou

$$|S| \leq k + \sum_{n=0}^{\infty} k \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \leq k \left(1 + \frac{r_1}{r - r_1} \right).$$

En faisant grandir m , on peut faire k aussi petit que l'on veut; S , pouvant devenir aussi petite que l'on veut, doit être égale à 0, parce qu'elle est indépendante de m . Donc

$$\int_a^{\infty} f(x, z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_a^{\infty} \varphi_n(z) dz.$$

3. Voici une conséquence de cette proposition.

Supposons que l'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_a^{\infty} f(x+h, z) dz$$

soit uniformément convergente pour les valeurs de h dont le module est égal ou $\leq r$ et que la fonction $f(x+h, z)$ soit pour les mêmes valeurs développable suivant les puissances entières et positives de h .

D'après le théorème de Taylor,

$$f(x + h, z) = f(x, z) + h \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{h^2}{1.2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots$$

et, comme nous avons démontré,

$$\Phi(x + h)$$

$$= \int_a^\infty f(x, z) dz + h \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial x} dz + \dots + \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} \int_a^\infty \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dz + \dots$$

Nous voyons que $\Phi(x + h)$ est aussi développable suivant les puissances entières et positives de h , ou, d'après M. Weierstrass, la fonction $\Phi(x)$ se comporte régulièrement dans le voisinage du point x .

Par conséquent,

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + h \frac{d\Phi}{dx} + \dots + \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} \frac{d^n \Phi}{dx^n} + \dots$$

En égalant les coefficients, nous trouvons

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty f(x, z) dz = \int_a^\infty \frac{\partial^n f(x, z)}{\partial x^n} dz.$$

On peut donc différentier sous le signe $\int$ autant de fois que l'on veut, si, dans le voisinage du point x , l'intégrale est uniformément convergente et la fonction f se comporte régulièrement.

4. Comme exemple, considérons l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-xz^2} dz.$$

Elle est uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles et positives de x , ou imaginaires dont la partie réelle est positive.

En effet, posons

$$x = t + ui, \quad t > 0;$$

$$\left| \int_m^\infty e^{-(t+ui)z^2} dz \right| < \int_m^\infty e^{-tz} dz,$$

ou

$$< \frac{e^{-mt}}{t}.$$

En prenant pour t une valeur positive a , on détermine m de telle façon que

$$\frac{e^{-mt}}{t} < k;$$

cette inégalité aura lieu pour toutes les valeurs de t plus grandes que a .

Donc

$$\left| \int_a^\infty e^{-xz^2} dz \right| < k.$$

La fonction $\Phi(x)$ est continue dans le voisinage de tous les points x situés à droite de l'axe des ordonnées.

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_a^\infty e^{-(x+h)z^2} dz$$

est uniformément convergente pour les valeurs de h telles que les points $x+h$ soient à l'intérieur d'un cercle situé à droite de l'axe des ordonnées et ayant x pour centre.

La fonction $e^{-(x+h)z^2}$ est développable suivant les puissances entières et positives de h dans ce même cercle.

Donc

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^\infty e^{-xz^2} dz = \int_a^\infty \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-xz^2}) dz.$$

§. Comme second exemple, considérons l'intégrale de Laplace

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1+z^2} dz,$$

finie et déterminée pour x réel.

La fonction

$$\frac{\cos(x+h)z}{1+z^2}$$

est développable suivant les puissances entières et positives de h , mais l'intégrale $\Phi(x+h)$ n'est pas uniformément convergente pour toutes les valeurs de h dont le module est inférieur ou égal à r .

L'intégrale

$$\Phi(x+h) = \int_0^\infty \frac{\cos(x+h)z}{1+z^2} dz$$

devient même infinie, si h est imaginaire. La valeur absolue de $\cos x$ est < 1 seulement dans le cas de x réel. Lorsqu'on donne à x une valeur imaginaire, $\cos x$ croît indéfiniment avec le module de x et de telle façon que

$$\lim \left| \frac{\cos x}{x^n} \right| = \infty, \quad \lim |x| = \infty.$$

Pour reconnaître si l'on peut différentier notre intégrale sous le signe $\int$, il faut recourir à la méthode générale.

En employant la formule de Taylor

$$\cos(x+h) = \cos x - h \sin x - h^2 \cos(x+0h),$$

on trouve sur-le-champ

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) - h \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz - h^2 \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x+0h)z}{1+z^2} dz.$$

On a l'égalité

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = - \int_0^\infty \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz$$

l'expression

$$h \int_0^\infty \frac{z^2 \cos(x+0h)z}{1+z^2} dz$$

s'annule pour $h = 0$, ce qui a lieu en effet.

L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{z^2 \cos xz}{1+z^2} dz$$

est décomposable en deux :

$$\int_0^\infty \cos xz dz - \int_0^\infty \frac{\cos xz dz}{1+z^2}.$$

La première intégrale est finie, quoique indéterminée; la seconde est finie et déterminée. Le produit de cette expression par h s'annule donc pour $h = 0$.

Voici la conclusion :

L'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xz}{1+z^2} dz$$

peut être différentiée sous le signe et on obtient l'intégrale

$$- \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz,$$

qui est nécessairement finie et déterminée pour toutes les valeurs réelles de x .

Appliquons le même raisonnement à l'intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz.$$

Nous trouverons qu'elle peut être différentiée si l'expression

$$h \int_0^{\infty} \frac{z^3 \sin(x+th)z}{1+z^2} dz$$

s'annule pour $h = 0$.

Nous ne savons pas ce que devient cette expression pour $h = 0$, puisque l'intégrale qui multiplie h est infinie.

Dans ce cas particulier, il y a un moyen indirect de conclure que la différentiation est impossible. Le résultat est l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{z^2 \cos xz}{1+z^2} dz,$$

indéterminée pour toutes les valeurs réelles de x , et il est impossible qu'elle soit la dérivée d'une fonction finie et déterminée.

On sait que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xz}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

Par la différentiation, on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz = dz \frac{\pi}{2} e^{-x};$$

c'est donc une fonction finie et déterminée ayant une dérivée.

Donc l'égalité

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{z \sin xz}{1+z^2} dz = \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{z \sin xz}{1+z^2} \right) dz$$

est en défaut.

6. La règle de différentiation sous le signe $\int$ n'est pas applicable aux intégrales de la forme

$$\Phi(x) = \int_a^b \frac{f(x, z)}{(z-b)^n} dz,$$

puisque la quantité sous le signe devient infinie pour $z = b$.

Cette intégrale a une valeur finie et déterminée, si n est < 1 .

En faisant la substitution

$$z - b = \frac{1}{t},$$

nous ramènerons l'intégrale à la forme déjà considérée

$$- \int_{\frac{1}{a-b}}^{\infty} \frac{f\left(x, b + \frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}} dt.$$

La fonction sous le signe $\int$ est finie et continue entre les limites d'intégration.

Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier; par M. A.-E. PELLET.

(Séance du 16 juin 1882.)

1. Soient η une racine de l'équation $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$, p étant un nombre premier, g une racine primitive de p , et e un diviseur de $p-1$; nous poserons

$$\frac{p-1}{e} = \omega.$$

η^{gi+jc} ne prend que ω valeurs différentes lorsque, i étant constant, on fait varier j . Soit

$$s_i = \sum_{j=0}^{i=\omega-1} \eta^{gi+jc};$$

s_i admet e valeurs distinctes, qu'on obtiendra en donnant à i les valeurs $0, 1, 2, \dots, e-1$; ces e valeurs de s_i se transforment l'une dans l'autre, lorsqu'on remplace η par une autre racine, η^{s^k} , de $\frac{x^p-1}{x-1} = 0$. Ces quantités s_i sont dites les périodes des racines d'ordre p de l'unité correspondant au diviseur e de $p-1$. Depuis Gauss, on connaît l'équation aux périodes pour e égal à l'un des trois nombres 2, 3, 4.

I. L'équation à deux périodes est

$$s^2 + s + \frac{1-P}{4} = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 + s + \frac{1+P}{4} = 0,$$

suivant que $p-1$ est divisible ou non par 4.

II. L'équation à trois périodes est

$$\omega^3 - 3p\omega - pL = 0,$$

ω représentant $3s+1$, et L un nombre entier déterminé par l'équation $4p = L^2 + 27M^2$, avec la condition $L \equiv 1 \pmod{3}$.

III. L'équation à quatre périodes affecte deux formes différentes suivant que $p-1$ est ou n'est pas divisible par 8. Désignons dans l'un et l'autre cas par y une racine de l'équation

$$y^2 + y + \frac{1-P}{4} = 0,$$

et par a un nombre entier déterminé par l'équation

$$p = a^2 + b^2,$$

avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$.

L'équation à quatre périodes est

$$s^2 - ys - \frac{p-1+(a+1)(2+4y)}{16} = 0,$$

si $p-1$ est divisible par 8;

$$s^2 - ys + \frac{3p+1-(a+1)(2+4y)}{16} = 0,$$

si $p-1$ n'est pas divisible par 8.

2. La fonction $\frac{x^p-1}{x-1}$ se décompose suivant le module premier q en $\frac{p-1}{\nu}$ facteurs irréductibles de degré ν , ν étant l'exposant auquel appartient q relativement au module p , c'est-à-dire le plus petit nombre tel que $q^\nu \equiv 1 \pmod{p}$ (SERRET, *Algèbre supérieure*, t. II). Le premier membre de l'équation aux e périodes des racines d'ordre p de l'unité se décompose en facteurs du premier degré, suivant le module premier q , si e divise $\frac{p-1}{\nu}$; dans le cas où e ne divise pas $\frac{p-1}{\nu}$, le premier membre de l'équation aux e périodes admet des facteurs irréductibles de degré supérieur à 1.

Comme on connaît l'équation aux périodes pour e égal à 2, 3 ou 4, ce théorème permet souvent de voir si $\frac{p-1}{\nu}$ est divisible par l'un de ces trois nombres, c'est-à-dire si q est résidu quadratique, cubique et biquadratique suivant le module premier p .

D'ailleurs si $p-1$ n'est pas divisible par 3, tout nombre q est résidu cubique mod. p ; et si $p-1$ n'est pas divisible par 4, tout nombre q résidu quadratique mod. p est aussi résidu biquadratique.

Ainsi, d'après I du n° 1, le nombre premier q est ou n'est pas résidu quadratique mod. p , suivant que la fonction

$$s^2 + s + \frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{4}$$

est ou n'est pas réductible suivant le mod. q ; ou, si q est différent de 2, suivant que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$ est ou n'est pas résidu quadratique suivant le mod. q . Ainsi les deux congruences

$$q^{\frac{p-1}{2}} \pm 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}} p^{\frac{q-1}{2}} \pm 1 \equiv 0 \pmod{q}$$

ont lieu en même temps, en faisant correspondre les signes supérieurs entre eux, et de même pour les inférieurs. Ce qui se traduit dans le système de notation de Legendre par

$$\left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}},$$

et démontre le célèbre théorème auquel ce géomètre a attaché son nom. Cette démonstration a été donnée la première fois par M. Mathieu, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1867).

La seule fonction irréductible (mod. 2) du second degré est $x^2 + x + 1$; on en déduit facilement que 2 est résidu quadratique pour tous les nombres premiers de la forme $8k \pm 1$, et n'est pas résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $8k \pm 3$.

Si $p \equiv 1 \pmod{3}$, pour que le nombre premier q soit résidu cubique suivant le module p , il faut et il suffit que la fonction $x^3 - 3px - pL$ se réduise suivant le module premier q , supposé différent de 3. Pour $q = 2$, on voit qu'il faut et suffit que L soit pair. L'entier L est déterminé par l'équation $L^2 + 27M^2 = 4p$, avec la condition $L \equiv 1 \pmod{3}$. Si L est pair, M l'est aussi et p est de la forme $l^2 + 27m^2$; donc la condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit résidu cubique de p est

$$p = l^2 + 27m^2;$$

lorsque $p - 1$ est divisible par 3.

2 n'est pas résidu quadratique pour les nombres premiers de la forme $4k + 1$, k étant impair; donc 2 ne peut être résidu biquadratique que pour les nombres premiers de la forme $8k + 1$, k pouvant être quelconque. Soient donc $p = 8k + 1$, a le nombre entier déterminé par l'équation $p = a^2 + b^2$, avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$; en se reportant au n° III du paragraphe précédent, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que 2 soit résidu biquadratique (mod. p) est que le nombre

$$\frac{4k - a - 1}{8},$$

qui est toujours entier, soit pair.

3. Pour qu'un nombre de la forme $a^n - 1$ soit premier, il est nécessaire que a soit égal à 2, et n premier. De ce qui précède on déduit facilement les propositions suivantes.

Si $n = 4q - 1$ est un nombre premier en même temps que $2n + 1$, le nombre $N = 2^n - 1$ est divisible par $2n + 1$.

Si $n = 4q + 1$ est un nombre premier en même temps que $6n + 1$, le nombre $N = 2^n - 1$ est divisible par $6n + 1$, pourvu qu'on puisse satisfaire à l'équation

$$6n + 1 = 4l^2 + 27m^2.$$

Un nombre de la forme $a^b + 1$ ne peut être premier que si b est égal à une puissance de 2. Les nombres premiers diviseurs de $2^{2^n} + 1$ sont de la forme $2^{n+1}m + 1 = p$; et il faut que 2 soit résidu d'une puissance $m^{\text{ième}}$ suivant ce module p . Ainsi 2 n'est pas résidu cubique suivant les deux nombres premiers

$$2^{12}.3 + 1 = 12289, \quad 2^{18}.3 + 1 = 786433,$$

car aucun d'eux n'est de la forme $l^2 + 27m^2$; ces nombres ne divisent par conséquent aucun nombre de la forme $2^{2^n} + 1$.

Caractère biquadratique de 2.

4. Soit un nombre premier impair $p = 2^{3+\alpha}m + 1$, m n'étant pas divisible par 2. Nous avons vu que, α étant déterminé par l'équation $p = a^2 + b^2$ avec la condition $a \equiv -1 \pmod{4}$, 2 est résidu biquadratique ou non suivant que

$$\frac{2^{\alpha+2}m - \alpha - 1}{8}$$

est un nombre pair ou impair. Si 2 est résidu biquadratique $\pmod{p}$, on a donc

$$\alpha \equiv 2^{\alpha+2}m - 1 \pmod{16},$$

d'où

$$b^2 = p - a^2 \equiv -2^{2\alpha+4}m^2 + 2^{\alpha+4}m \pmod{32};$$

$2^{\alpha+4}m - 2^{2\alpha+4}m^2$ est divisible par 32, pour $\alpha = 0$ comme pour les valeurs de α supérieures à 0; donc b^2 est divisible par 64.

Si 2 n'est pas résidu biquadratique $\pmod{p}$, on a

$$\alpha \equiv 2^{\alpha+2}m - 1 + 8 \equiv 2^{\alpha+2}m + 7 \pmod{16},$$

d'où

$$b^2 = p - a^2 \equiv -2^{2\alpha+4}m^2 - 3.2^{\alpha+4}m - 16 \pmod{32};$$

on en déduit $b^2 \equiv +16 \pmod{32}$. Donc, dans ce cas, b^2 n'est

pas divisible par une puissance de 2 supérieure à 16. Ainsi 2 est résidu biquadratique pour les nombres premiers de la forme $a^2 + 64b^2$; 2 n'est pas résidu biquadratique pour les nombres premiers de la forme $a^2 + 16b^2$, b étant impair dans la dernière formule. Ce caractère a déjà été donné par Lejeune-Dirichlet (*Journal de Liouville*, 1859); comme on voit, il découle facilement de la méthode précédente.

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles ;
par M. HALPHEN.

(Séance du 16 juin 1882) (1).

1. Si l'on assigne à une courbe plane neuf points doubles donnés, on lui impose par là vingt-sept conditions. C'est précisément le nombre des conditions nécessaires pour déterminer une courbe du sixième degré. Il semble donc qu'on puisse trouver une courbe du sixième degré à neuf points doubles donnés. Il n'en est rien. Par les neuf points passe, en effet, une courbe de troisième degré : c'est cette courbe, comptant double, qui constitue l'unique solution, purement illusoire.

Néanmoins, il existe assurément des courbes *propres* du sixième degré, à neuf et même à dix points doubles. Pour de telles courbes, les neuf points ne sont donc pas susceptibles d'être pris arbitrairement. C'est la liaison entre ces points que je me propose de rechercher ici. Je donnerai ensuite la solution de quelques problèmes se rattachant au même sujet, et une généralisation concernant les courbes de degré $3m$, à neuf points multiples d'ordre m .

2. Soit $C = 0$ l'équation d'une courbe du sixième degré, à neuf points doubles. Soit aussi $A = 0$ l'équation d'une courbe du troisième degré, passant en ces mêmes neuf points. Par l'équation

(1) A la fin d'un Mémoire *Sur les réseaux de courbes planes* (t. I de ce *Bulletin*, p. 129), M. Kohler a signalé ce sujet de recherches, mais en indiquant des résultats tout à fait erronés.

$C + \lambda A^2 = 0$ se trouve représenté un faisceau de courbes du sixième degré, ayant encore les mêmes points doubles. Donc *neuf points doubles d'une courbe du sixième degré sont les points doubles d'une infinité de courbes du sixième degré.*

Ces points comptent, au moins, pour dix-huit intersections des courbes C , A . Or ce nombre dix-huit est précisément le produit des degrés 6 et 3. Par conséquent, la courbe A est unique, sans quoi la courbe C serait décomposable. Ainsi, *par les neuf points doubles d'une courbe propre du sixième degré passe une seule courbe du troisième degré.*

3. Supposons les points de A représentés, à l'ordinaire, par les arguments d'une fonction doublement périodique, un des points d'inflexion ayant l'argument zéro. Soient $u_1, \dots, u_9$ les arguments des neuf points. Ces points, comptés deux fois, constituent l'intersection complète de C et de A . Donc le double de la somme $u_1 + \dots + u_9$ est une période. La somme elle-même ne peut être une période; car alors la courbe A ne serait pas unique. *La somme $u_1 + \dots + u_9$ est donc une des trois demi-périodes.* Telle est la relation entre les neuf points; on peut d'ailleurs lui faire revêtir diverses formes géométriques. Considérons le point de A dont l'argument u'_9 est égal à u_9 diminué de la demi-période: la somme $u_1 + \dots + u_8 + u'_9$ est une période; ceci conduit aux énoncés suivants :

Pour que neuf points $a_1, \dots, a_8, a_9$, appartenant à une seule courbe du troisième degré A , soient les points doubles d'une courbe propre du sixième degré, voici la condition nécessaire et suffisante.

Choisissez huit de ces points $a_1, \dots, a_8$, et prenez le point a'_9 où passent toutes les courbes du troisième degré, menées par les huit premiers;

Les tangentes de la courbe A aux points a_9 et a'_9 doivent se rencontrer sur cette même courbe A .

Ou bien encore : *Par a'_9 menez les quatre tangentes à A ; les quatre points de contact donnent lieu à trois couples de cordes conjuguées. Le point a_9 doit être l'intersection de deux cordes conjuguées.*

Voici maintenant une autre forme de la relation, où les neuf points figurent symétriquement :

Par les neuf points menez une courbe du quatrième degré; cette dernière rencontre Λ en trois autres points. Il existe une conique touchant Λ en ces trois points.

Réciproquement : *par les trois points de contact d'une conique et d'une courbe du troisième degré Λ , menez une courbe du quatrième degré : les neuf points où cette dernière rencontre, en outre, Λ , peuvent être pris pour les points doubles d'une courbe du sixième degré.*

Effectivement la somme des arguments des neuf points et celle des arguments des trois points font ensemble une période; si l'une d'elles est une demi-période, il en est de même pour l'autre.

4. Je vais maintenant résoudre ce problème : *Trouver le lieu du neuvième point quand les huit autres sont donnés.*

Quelques mots auparavant sur un autre lieu géométrique beaucoup plus simple : à chaque courbe Λ d'un faisceau du troisième degré on mène la tangente en l'un des pivots, et l'on prend le point de rencontre z de cette tangente avec Λ . Le lieu de ce point z est, comme on le verra aisément, une courbe du quatrième degré, ayant pour point triple le point dont il s'agit, et passant en chacun des huit autres.

J'arrive au problème proposé. Pour le résoudre, j'emploie le premier énoncé du n° 3. Les points $a_1, \dots, a_8$ étant donnés, j'envisage le faisceau du troisième degré que ces points déterminent, et le neuvième pivot a'_9 . À chaque courbe Λ du faisceau, je mène la tangente en a'_9 , rencontrant la courbe en z ; par z je mène une nouvelle tangente à Λ . Le point de contact de cette tangente est un point du lieu. On aura donc l'équation du lieu en éliminant le paramètre du faisceau entre l'équation de Λ et celle de la première polaire de z .

Désignons par a_x^3 et z_x^3 les symboles des premiers membres des équations de Λ et de sa hessienne. Employons la lettre y pour les coordonnées du point a'_9 . Le point z est donné, comme on sait,

par les deux équations

$$a_y^2 a_z = 0, \quad x_y^2 x_z = 0,$$

en sorte que ses coordonnées sont proportionnelles aux trois déterminants

$$a_y^2 x_y^2 (a_2 x_3), \quad a_y^2 x_y^2 (a_3 x_1), \quad a_y^2 x_y^2 (a_1 x_2).$$

L'équation de sa polaire est donc

$$a_y^2 x_y^2 (a b x) b_x^2 = 0.$$

Le premier membre est du cinquième degré par rapport aux coefficients de a_x^3 , du second degré par rapport aux coordonnées x . L'élimination du paramètre entre cette équation et celle de A donne donc une équation du degré 17. On voit de plus que le lieu ainsi représenté a pour point sextuple le pivot a'_9 et pour point quintuple chacun des autres pivots. Mais il est manifeste que ce lieu se décompose en deux parties, dont l'une est le lieu de z , comptant double. Donc :

Étant donnés huit points doubles d'une courbe du sixième degré, qui doit avoir un neuvième point double, le lieu de ce dernier est une courbe du neuvième degré, sur laquelle chacun des huit points donnés est triple.

Sur chaque cubique A du faisceau se trouvent trois points du lieu. Quand cette cubique a un point double, deux de ces trois points s'y réunissent. Donc :

Le lieu passe en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points.

Dans le cas particulier où les pivots sont les points d'inflexion des cubiques, le point a_9 est un point sextactique situé sur l'axe harmonique correspondant au point a'_9 . Ainsi : *Quand les huit points sont les points d'inflexion d'une courbe du troisième degré, le lieu se réduit à une ligne droite.*

3. Une courbe C, du sixième degré, ayant neuf points doubles, et A étant la cubique qui passe en ces neuf points, on a les mêmes points doubles pour toute courbe du faisceau

$C + \lambda A^2 = 0$. Dans ce faisceau se trouvent comprises des courbes ayant un point double de plus. Ainsi le lieu précédent est aussi celui du neuvième et du dixième point double des courbes unicursales du sixième degré ayant huit points doubles donnés.

Dans le faisceau $C + \lambda A^2 = 0$ combien y a-t-il de courbes ayant un dixième point double? Pour résoudre cette question, considérons le lieu (c) du point de contact de la tangente menée à chaque courbe du faisceau par un point arbitraire c . L'existence de la courbe double A^2 réduit de trois unités la seconde caractéristique du faisceau; elle est ainsi égale à 7, et la courbe (c) est du huitième degré. Cette courbe (c) passe en chaque pivot du faisceau; elle s'y compose de deux branches dont l'une a pour tangente la droite qui passe en c ; l'autre tangente, au contraire, est indépendante de c ; c'est la conjuguée harmonique de la tangente de A par rapport aux deux tangentes de C . Deux courbes analogues (c), (c'), relatives à deux points différents c , c' , ont ainsi cinq intersections réunies en chacun des pivots. Elles ont, en outre, en commun les sept points de contact des courbes du faisceau avec la droite cc' ; les autres points, au nombre de $8^2 - 9 \cdot 5 - 7 = 12$ sont les points doubles supplémentaires des courbes du faisceau. Ainsi, *parmi les courbes du sixième degré ayant les mêmes neuf points doubles, il y en a douze qui ont un dixième point double.*

6. Je me propose de former effectivement l'équation générale des courbes du sixième degré à neuf points doubles. Je me servirai, à cet effet, de la dernière proposition énoncée au n° 3. Je prendrai une cubique A triplement tangente à une conique donnée, et je supposerai les neuf points déterminés par l'intersection de la cubique avec une courbe B , du quatrième degré, passant aux trois points de contact de A et de la conique. Le triangle de ces trois points sera le triangle de référence.

Représentant par $C = 0$ la courbe cherchée, j'envisage la ligne composée $x_1 x_2 x_3 C$. Elle a pour points doubles tous les points d'intersection de A et de B . On aura donc une identité de cette forme

$$x_1 x_2 x_3 C = \alpha B^2 - \beta AB + \gamma A^2,$$

dans laquelle α , β , γ sont des polynômes avec les degrés respectifs

1, 2, 3. Le problème consiste donc uniquement à déterminer trois pareils polynômes, de telle sorte que le second membre soit divisible par x_1, x_2, x_3 . Comme la solution n'offre ainsi aucune difficulté, je donnerai seulement le résultat.

Prenons A sous cette forme

$$A = x_1 x_1^2 (x_2 + x_3) + x_2 x_2^2 (x_3 + x_1) + x_3 x_3^2 (x_1 + x_2) + a x_1 x_2 x_3,$$

de telle sorte que la cubique soit triplement tangente à la conique

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0.$$

Le polynôme du 4^e degré B a pour forme générale

$$B = x_2 x_3 P + x_3 x_1 Q + x_1 x_2 R,$$

P, Q, R étant du 2^e degré. J'écrirai ces polynômes sous la forme usuelle

$$P = P_{11} x_1^2 + P_{22} x_2^2 + P_{33} x_3^2 + 2 P_{12} x_1 x_2 + 2 P_{23} x_2 x_3 + 2 P_{31} x_3 x_1,$$

et ainsi des deux autres.

Voici maintenant quels sont les polynômes α, β, γ . En raison de la symétrie des notations, je peux abréger et n'écrire qu'un seul terme de chaque type; les autres termes se déduisent par la permutation des indices 1, 2, 3, accompagnée de la permutation correspondante des lettres P, Q, R.

$$\alpha = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3,$$

$$\beta = (Q_{11} + R_{11}) x_1^2 + \left(2 P_{23} + \frac{Q_{33} x_2}{x_3} + \frac{R_{22} x_3}{x_2} \right) x_2 x_3 + \dots$$

$$\gamma = \lambda x_1 x_2 x_3 + \frac{Q_{11} R_{11}}{x_1} x_1^3 + \left(2 \frac{R_{22} P_{23}}{x_2} + \frac{Q_{33} P_{22}}{x_3} \right) x_2^2 x_3 + \dots$$

Les trois polynômes sont entièrement déterminés, sauf le seul terme arbitraire $\lambda x_1 x_2 x_3$ dans γ ; d'où résulte, comme il convient, que l'équation cherchée renferme le terme arbitraire $\lambda \Lambda^2$.

7. Voici maintenant un cas particulier où le calcul peut être fait tout autrement, et dans lequel s'offre une circonstance intéressante. Suivant la remarque faite dans une autre occasion (1),

(1) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. IX, p. 105.

les vingt-sept points sextactiques d'une cubique se partagent en trois groupes de neuf points : un même groupe comprend les points de contact de la cubique avec une courbe de troisième classe ; la somme des arguments de ces neuf points est une demi-période. Ils peuvent donc être pris pour les points doubles d'une courbe C.

Les neuf points dont il s'agit se déduisent de l'un d'eux $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$ par le changement de x_1 et x_2 en ωx_1 et $\omega^2 x_2$, ω étant racine cubique de l'unité, et par la permutation des indices. Il en résulte que la courbe C reste inaltérée par ces changements, et que son équation est comprise dans la forme

$$C = a \Sigma x_1^6 + 2b \Sigma x_1^3 x_2^3 + 3c x_1^2 x_2^2 x_3^2 + 6d x_1 x_2 x_3 \Sigma x_1^3 = 0.$$

Il suffit de déterminer les coefficients de telle sorte que cette courbe ait le point double $x_1 = x_2 = \rho$, $x_3 = 1$; elle aura, en même temps, les huit autres. Cette détermination conduit au résultat suivant, où λ est arbitraire :

$$\begin{aligned} a &= 3(1 + \lambda)\rho^4, \\ b &= -3\rho(\rho^3 + 1), \\ c &= \lambda(2\rho^6 + 6\rho^3 + 1) + 3(2\rho^3 + 1), \\ d &= -\lambda\rho(\rho^3 + 1). \end{aligned}$$

La circonstance suivante fait l'intérêt de cet exemple. Les courbes du faisceau, douées d'un dixième point double, dégèrent chacune en l'ensemble de trois coniques. On obtient un de ces groupes en supposant $\lambda = -1$, et l'on a alors

$$C = (x_1^2 - \rho x_2 x_3)(x_2^2 - \rho x_3 x_1)(x_3^2 - \rho x_1 x_2).$$

Les trois autres groupes se déduisent de celui-là par le changement du triangle d'inflexions. Il suffit, à cet effet, d'accentuer les lettres x , ρ et de faire successivement les substitutions suivantes, ω désignant toujours une racine cubique de l'unité :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1, & x'_2 &= x_3 + \omega^2 x_2 + \omega x_1, & x'_3 &= x_3 + x_1 + x_2, \\ x''_1 &= \omega x_1 + x_2 + x_3, & x''_2 &= x_1 + \omega x_2 + x_3, & x''_3 &= x_1 + x_2 + \omega x_3, \\ x'''_1 &= \omega^2 x_1 + x_2 + x_3, & x'''_2 &= x_1 + \omega^2 x_2 + x_3, & x'''_3 &= x_1 - x_2 + \omega^2 x_3; \\ \rho' &= 1 - \rho, \\ \rho'' &= 1 - \omega^2 \rho, \\ \rho''' &= 1 - \omega \rho. \end{aligned}$$

Dans chaque groupe, les trois coniques se coupent deux à deux en trois points, les neuf points donnés étant laissés de côté. Ces trois points sont les sommets d'un triangle d'inflexions. Les douze points doubles appartenant, d'après le n° 5, aux courbes du faisceau sont ainsi les sommets des quatre triangles d'inflexions.

Ces faits s'expliquent très facilement. Chacun des neuf points considérés a pour argument celui d'un point d'inflexion, augmenté d'une demi-période h , la même pour tous. Soient 1, 2, 3 les points d'inflexion situés sur un des côtés d'un des triangles; 4, 5, 6 sur un autre côté du même triangle, et 7, 8, 9 sur le troisième côté. La somme des arguments des points correspondant à 1, 2, 3, 4, 5, 6, est une période; ces points sont donc sur une conique. De même les points qui correspondent à 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont sur une conique, et à 7, 8, 9, 1, 2, 3 sur une troisième conique. Ainsi est composé le groupe de trois coniques correspondant à un triangle d'inflexions.

8. Pour généraliser les résultats qui précèdent, envisageons une courbe C_m , de degré $3m$, avec neuf points multiples d'ordre m . Une pareille courbe peut exister; son genre sera égal à l'unité, car on a

$$\frac{(3m-1)(3m-2)}{2} - 9 \frac{m(m-1)}{2} = 1.$$

En outre, si l'on donne les neuf points, on impose ainsi des conditions au nombre de $9 \frac{m(m+1)}{2}$, juste égal à celui des arbitraires qu'admet une courbe de degré $3m$. Cependant si les points sont quelconques, la courbe n'existe pas. La solution illusoire consiste en une cubique A , comptant m fois.

Pour les mêmes raisons qu'au n° 2, on voit que *les neuf points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$ sont les points multiples, de ce même ordre, d'une infinité de pareilles courbes. Il n'y passe qu'une seule courbe du troisième degré.*

Sur la cubique A , passant en ces neuf points, la somme des arguments, répétée m fois, fait une période. La somme est donc elle-même la $\mu^{\text{ième}}$ partie d'une période, μ étant un diviseur de m . Mais, si μ diffère de m , les courbes C_μ , de degré 3μ , ayant ces

points pour multiples d'ordre μ , forment un faisceau, et la courbe $\dot{C}_m$ dégénère en l'ensemble de $\frac{m}{\mu}$ courbes C_μ . Donc la liaison entre les points consiste en ce que la somme de leurs arguments soit proprement la $m^{\text{ième}}$ partie d'une période.

9. Huit de ces points $a_1, \dots, a_8$ étant donnés, si l'on prend une cubique A du faisceau qu'ils déterminent, on obtient sur cette cubique autant de points a_9 qu'il y a de solutions au problème de la division propre des périodes par le nombre m . Soit m décomposé en facteurs premiers

$$m = p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots,$$

le nombre des solutions est cette fonction arithmétique

$$\psi(m) = m^2 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \left(1 - \frac{1}{q^2}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \dots$$

Tel est le nombre des points mobiles où une cubique du faisceau rencontre le lieu du point a_9 . Il est d'ailleurs visible que ce lieu ne passe pas au neuvième pivot a'_9 , l'argument de a_9 devant différer de celui de a'_9 par une fraction de période.

Soit δ l'ordre de multiplicité de chacun des huit pivots sur le lieu de a_9 . Ces huit points donnent, dans la somme des arguments des intersections de ce lieu et d'une cubique A , l'élément $\delta(u_1 + \dots + u_8)$. Soit v l'argument de a'_9 ; et soient aussi $h_1, h_2, \dots$, les $m^{\text{ièmes}}$ parties des périodes. La somme $h_1 + h_2 + \dots$ est une période. Donc les divers points a_9 situés sur A apportent à la somme des arguments l'élément $\psi(m)v$, ou $-\psi(m)(u_1 + \dots + u_8)$. La somme totale devant faire une période, on a $\delta = \psi(m)$.

D'autre part, si d est le degré du lieu, on aura $3d - 8\delta = \psi(m)$. Donc $d = 3\psi(m)$. Ainsi :

Étant donnés huit points multiples d'ordre m d'une courbe de degré $3m$, qui doit avoir un neuvième point multiple d'ordre m , le lieu de ce neuvième point est une courbe du degré $3\psi(m)$, sur laquelle chacun des huit points est multiple d'ordre $\psi(m)$.

Pour une cubique unicursale A , la division des périodes, au lieu d'avoir trait aux fonctions elliptiques, se rapporte aux fonctions

circulaires. Le nombre des solutions est alors cette autre fonction arithmétique

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \left(1 - \frac{1}{r}\right) \dots$$

Les autres solutions se réunissent au point double. Par conséquent : *en chacun des douze points doubles des cubiques du faisceau déterminé par les huit points le lieu précédent a, avec la cubique, des intersections réunies au nombre de $\psi(m) - \varphi(m)$.*

Une étude plus approfondie serait sans doute nécessaire pour examiner, dans chaque cas, la nature de ces points sur ce lieu. Par exemple, pour $m = 3$, on a $\psi(m) - \varphi(m) = 6$. Eu égard aux autres points singuliers, c'en est assez pour conclure qu'en chacun des douze points la courbe a deux branches tangentes aux deux branches de la cubique.

10. Dans le faisceau $C_m + \lambda A^m = 0$ se trouvent des courbes ayant, en outre, un point double. Leur nombre se trouve par une analyse semblable à celle du n° 5. La seconde caractéristique est réduite de $3(m-1)$ unités par l'existence de la courbe multiple A^m . Elle est ainsi

$$v = 2(3m-1) - 3(m-1) = 3m+1.$$

Le lieu (c) des points où les courbes du faisceau sont touchées par les tangentes issues d'un point c est ainsi de degré $3m+2$. En chaque pivot, il a une tangente passant en c , et $(m-1)$ tangentes indépendantes de c . Deux pareilles courbes (c), (c'), ont, de la sorte, en chaque pivot, des intersections réunies au nombre de m^2+m-1 . Le nombre des points doubles est, par conséquent

$$(3m+2)^2 - (3m+1) - 9(m^2+m-1) = 12.$$

Ainsi, *parmi les courbes de degré $3m$, ayant les mêmes neuf points multiples d'ordre m , il y en a douze qui ont, en outre, un point double.* Cet énoncé singulier s'applique aussi, comme on voit, au cas $m = 1$.

11. Le lieu du neuvième point, dont le degré est $3\psi(m)$, se

simplifie notablement quand les huit points donnés sont les points d'inflexion d'une cubique. On a déjà vu, au n° 3, qu'il se réduit à une ligne droite pour $m = 2$. Pour $m = 3$, il cesse manifestement d'exister; les courbes C_m n'existent pas non plus. Pour les autres cas, la simplification se trouve aisément au moyen des résultats que j'ai démontrés dans un Mémoire sur les courbes du troisième degré (*Mathematische Annalen*, t. XV, p. 375), et voici le résultat :

Si les huit points sont les points d'inflexion d'une cubique, le degré du lieu du neuvième point se réduit à $\frac{1}{3}\psi(m)$, au lieu de $3\psi(m)$; ce lieu ne passe plus en aucun des points donnés. En outre, si m est divisible par 3, le lieu se décompose en huit courbes distinctes.

Par exemple, pour $m = 9$, le lieu se compose de huit cubiques équi-anharmoniques dont chacune est inscrite et circonscrite à la fois à trois des triangles d'inflexions (*loc. cit.*, p. 362); pour $m = 6$, il se compose de huit droites; pour $m = 4$, d'une courbe du quatrième degré.

Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions;

par M. V. SCHLEGEL.

(Séance du 7 juillet 1882.)

Introduction. — Parmi les notions de Géométrie susceptibles d'être étendues à n dimensions se trouve aussi celle de la figure complètement limitée. Quant aux figures régulières (polygones et polyèdres), on sait qu'il y a dans l'espace à quatre dimensions six figures de cette espèce, et, en général, qu'il y a trois séries de figures régulières, dont les premiers termes sont : 1° le triangle et le tétraèdre ; 2° le carré et le cube ; 3° le carré et l'octaèdre (¹).

Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre aux figures régu-

(¹) STRINGHAM, *Regular figures in n dimensional space* (*Americ. Journal of Math.*, Vol. III, p. 1.)

lières. Dans un Mémoire intitulé : *Théorie des figures composées homogènement*, qui va paraître bientôt dans les *Nova Acta Academiae Leopold. Carol.*, vol. XLIV, j'ai établi la notion des figures limitées homogènement. Je dis qu'une figure à n dimensions est limitée homogènement si : 1^o à chaque sommet se rencontrent le même nombre d'arêtes, de plans, de corps, etc. ; 2^o suivant chaque arête se rencontrent le même nombre de plans, de corps, etc., etc. En disant, pour abrégé, « homogène » pour « limité homogènement », on voit que tous les polygones plans sont homogènes. On peut démontrer que, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a que cinq espèces de polyèdres homogènes, dont les cas spéciaux (les polyèdres réguliers) naissent par la supposition que les figures limitantes soient régulières. Également, il y a six figures homogènes dans l'espace à quatre dimensions et trois dans tout autre espace.

Dans ce qui va suivre, je vais démontrer qu'on peut étendre quelques théorèmes de Géométrie à l'espace à n dimensions. A cet effet, il sera nécessaire d'examiner les trois séries de figures l'une après l'autre.

Quant à la méthode de recherche, il n'y en a qu'une seule qu'on puisse employer, si l'on veut obtenir les résultats géométriques par des calculs simples : c'est la méthode de M. Grassmann. Pour comprendre les recherches suivantes, il suffira de savoir que, si e_1 et e_2 sont deux points d'une droite, chaque point x de la droite peut être représenté par l'équation

$$(x_1 + x_2) x = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

où x_1 et x_2 sont deux nombres réels, dont la somme peut être posée égale à 1. On tire de cette équation

$$\frac{e_1 - x}{x - e_2} = \frac{x_2}{x_1}.$$

Cette équation dit que le rapport des distances $e_1 x$ et $x e_2$ est égal à $\frac{x_2}{x_1}$. Il faut encore savoir que le « produit extérieur » de deux points A et B est la longueur de la droite entre A et B : que

$$(AB) = - (BA),$$

d'où il suit que

$$(AA) = 0.$$

(La distance $A - B$ et la partie linéaire AB sont deux notions différentes. Deux distances de même longueur $A - B$ et $A_1 - B_1$ sont égales, si elles sont situées sur la même droite ou sur deux parallèles; au contraire, deux parties linéaires AB et $A_1 B_1$ seulement, si elles se trouvent sur la même droite.)

Également on peut dériver un point x , situé dans le plan, de trois points e_1, e_2, e_3 , au moyen des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, par l'équation

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1);$$

et ainsi de suite.

I. — FIGURES DE LA PREMIÈRE SÉRIE (1).

Triangle. — Soient e_1, e_2, e_3 les sommets d'un triangle. Les centres des arêtes (x_1, x_2, x_3) sont déterminés par les équations

$$(1) \quad x_1 = \frac{e_2 + e_3}{2}, \quad x_2 = \frac{e_3 + e_1}{2}, \quad x_3 = \frac{e_1 + e_2}{2},$$

d'où l'on tire

$$(2) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 2x_1 + e_1 = 2x_2 + e_2 = 2x_3 + e_3.$$

Ces équations disent que les droites $x_1 e_1, x_2 e_2, x_3 e_3$ passent par un point (x) qui est donné par l'équation

$$(3) \quad 3x = e_1 + e_2 + e_3;$$

par conséquent, x est le centre de gravité du triangle.

Si l'on remplace dans l'équation (3) $e_2 + e_3$ par sa valeur $2x_1$, on obtient

$$3x = e_1 + 2x_1$$

et, en retranchant $3e_1$,

$$3(x - e_1) = 2(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{2}{3},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales.

(1) La première figure de cette série est, à proprement parler, la partie d'une droite comprise entre deux points, mais elle n'offre pas de qualités remarquables pour notre but.

Tétraèdre. — Soient e_1, e_2, e_3, e_4 les sommets d'un tétraèdre. Alors les centres des arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2}$$

et les centres des faces

$$x_u = \frac{e_r + e_s + e_t}{3} \quad (r, s, t, u = 1, 2, 3, 4).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1), \\ y_2 &= \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{3} e_2 + \frac{\beta_1}{3} e_3 + \frac{\beta_1}{3} e_4, \\ y_2 &= \frac{\beta_2}{3} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{3} e_3 + \frac{\beta_2}{3} e_4. \end{aligned}$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut que les coefficients des points $e_1, e_2, \dots$ soient égaux deux à deux, parce qu'un point ne peut être dérivé de quatre autres points que d'une seule manière. On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3} = \frac{\beta_2}{3}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_1 = \frac{3}{4},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4},$$

done les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par le centre de gravité du tétraèdre. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$ et $x_4 e_4$ ont la même propriété. On a donc le théorème connu :

Les quatre droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre

avec les centres de gravité des faces opposées passent par le centre de gravité du tétraèdre.

En remplaçant dans la formule

$$4x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

$e_2 + e_3 + e_4$ par la valeur $3x_1$, on obtient

$$4x = e_1 + 3x_1$$

et, en retranchant $4e_1$ des deux côtés,

$$4(x - e_1) = 3(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{3}{4},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales du tétraèdre.

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4$ par $2x_{34}$, il vient

$$4x = 2x_{12} + 2x_{34}$$

ou

$$x = \frac{x_{12} + x_{34}}{2}.$$

De même

$$x = \frac{x_{13} + x_{24}}{2} = \frac{x_{14} + x_{23}}{2}.$$

On a donc le théorème :

Le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les centres de deux arêtes opposées quelconques.

Pour le triangle $x_{34}e_1e_2$, les résultats obtenus donnent encore le théorème :

Les droites qui joignent deux sommets d'un triangle (e_1, e_2) au milieu de la troisième transversale ($x_{34}x_{12}$) divisent les arêtes ($x_{34}e_1, x_{34}e_2$) dans la proportion 1 : 2, et se divisent entre elles dans la proportion 1 : 3.

La projection d'un tétraèdre sur le plan est un quadrilatère avec ses deux diagonales (il y a deux formes de cette figure, selon qu'un sommet est situé dans le triangle formé par les trois autres

ou non). Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le tétraèdre deviennent pour la projection les suivants :

Si l'on joint chaque sommet d'un quadrilatère avec le centre de gravité du triangle formé par les trois autres sommets, ces quatre droites passent par le même point et se divisent entre elles suivant la proportion 1 : 3. Passent aussi par le même point les trois droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées et ceux des diagonales du quadrilatère. Ces droites se divisent en parties égales.

Pentaédroïde. — Nous appelons ainsi (suivant M. Stringham) la figure à quatre dimensions qui est limitée par cinq tétraèdres, dont quatre ont chaque fois un sommet commun.

Soient $e_1, e_2, \dots, e_5$ les sommets de cette figure. Alors les centres des dix arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2},$$

les centres des dix faces

$$x_{rst} = \frac{e_r + e_s + e_t}{3}$$

et les centres des cinq corps limitants

$$x_v = \frac{e_r + e_s + e_t + e_u}{4} \quad (r, s, t, u, v = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1),$$

$$y_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)$$

ou

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{4} e_2 + \frac{\beta_1}{4} e_3 + \frac{\beta_1}{4} e_4 + \frac{\beta_1}{4} e_5,$$

$$y_2 = \frac{\beta_2}{4} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{4} e_3 + \frac{\beta_2}{4} e_4 + \frac{\beta_2}{4} e_5.$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut que les coefficients des points $e_1, e_2, \dots$ soient égaux deux à deux (comme ci-dessus). On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4} = \frac{\beta_2}{4}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{1}{5}, \quad \beta_1 = \frac{4}{5},$$

et les valeurs de γ_1 et γ_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Donc les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par un point qu'on peut appeler, par analogie, « centre » du pentaédroïde. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$, $x_4 e_4$, $x_5 e_5$ ont la même propriété. On a donc le théorème :

Les cinq droites qui joignent les sommets d'un pentaédroïde avec les centres des corps opposés passent par le centre du pentaédroïde.

En remplaçant dans la formule

$$5x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

$e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ par la valeur $4x_1$, on obtient

$$5x = e_1 + 4x_1,$$

et, en retranchant $5e_1$ des deux côtés,

$$5(x - e_1) = 4(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{4}{5}.$$

Donc : *Les cinq droites ci-dessus mentionnées se divisent entre elles suivant la proportion de 1 : 4.*

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4 + e_5$ par $3x_{345}$, il vient

$$5x = 2x_{12} + 3x_{345}$$

ou

$$5(x - x_{12}) = 3(x_{345} - x_{12}),$$

ou

$$\frac{x - x_{12}}{x_{345} - x_{12}} = \frac{3}{5};$$

c'est-à-dire que : *Les dix droites qui joignent le milieu de chaque arête avec le centre de la face opposée passent par le centre du pentaédroïde et se divisent entre elles suivant la proportion de 2 : 3.*

La projection d'un pentaédroïde dans l'espace est un corps qui affecte deux formes, selon qu'un sommet est situé dans le tétraèdre formé par les quatre autres ou non. On obtient les deux formes en joignant un point (5) situé dans un tétraèdre, ou en dehors, avec les quatre sommets (1, 2, 3, 4). Alors les cinq tétraèdres sont 1234, 1235, 1345, 1245, 2345. On voit aussi facilement qu'aucune des arêtes et des faces du pentaédroïde n'a disparu par la projection.

Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le pentaédroïde, appliqués à sa projection, deviennent les suivants :

Si l'on joint un point avec les sommets d'un tétraèdre et chacun de ces cinq points avec le centre du tétraèdre formé par les quatre autres, ces cinq droites passent par le même point et se divisent entre elles dans la proportion de 1 : 4. Passent aussi par le même point les dix droites qui joignent deux à deux les milieux des arêtes avec les centres des faces opposées. Ces droites se divisent dans la proportion de 2 : 3.

Figure à n dimensions. — Sur la figure à n dimensions se trouvent des figures limitantes à 0, 1, 2, ... ($n - 1$) dimensions, c'est-à-dire des sommets, arêtes, faces (triangles), corps (tétraèdres), etc. Alors le nombre des figures limitantes à k dimensions est (1)

$$\frac{(n+1)(n)(n-1) \dots [n-(k-1)]}{1.2.3 \dots (k+1)} = (n+1)^{k+1}.$$

(1) Voir STRINGHAM, *loc. cit.*, p. 2. — Pour $k = n - 1$, on obtient $(n+1)^n$ ou $n+1$.

Par conséquent, il y a

$$\begin{aligned}(n+1) & \text{ sommets,} \\ (n+1)^2 & \text{ arêtes,} \\ (n+1)^3 & \text{ faces, etc.}\end{aligned}$$

Soient $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ les sommets de la figure. Alors les centres des arêtes sont

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2}}{2},$$

les centres des faces

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2} + e_{r_3}}{3},$$

et, en général, les centres des figures limitantes à k dimensions

$$\frac{e_{r_1} + e_{r_2} + \dots + e_{r_{k+1}}}{k+1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n+1).$$

Chaque figure à k dimensions est située vis-à-vis d'une autre à $(n-k-1)$ dimensions. Le nombre des unes est aussi grand que celui des autres, à cause de l'identité

$$(n+1)^{(k+1)} = (n+1)^{(n-k-1+1)}.$$

Soient

$$x_1^k = \frac{e_2 + e_3 + \dots + e_{k+2}}{k+1}, \quad x_2^k = \frac{e_1 + e_3 + \dots + e_{k+2}}{k+1}$$

les centres de deux figures limitantes à k dimensions,

$$\begin{aligned}x_1^{n-k-1} &= \frac{e_{k+3} + e_{k+4} + \dots + e_{n+1} + e_1}{n-k}, \\ x_2^{n-k-1} &= \frac{e_{k+3} + e_{k+4} + \dots + e_{n+1} + e_2}{n-k}\end{aligned}$$

les centres des figures situées vis-à-vis des premières.

En outre,

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 x_1^k + \beta_1 x_1^{n-k-1} \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1), \\ \gamma_2 &= \alpha_2 x_2^k + \beta_2 x_2^{n-k-1} \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)\end{aligned}$$

deux points quelconques donnés sur les droites x_1^k, x_1^{n-k-1} et x_2^k, x_2^{n-k-1} . En remplaçant les points x par leurs valeurs, on ob-

tiendra

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\beta_1 e_1}{n-k} + \frac{\alpha_1 e_2}{k+1} + \frac{\alpha_1 e_3}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_1 e_{k+2}}{k+1} \\ &\quad + \frac{\beta_1 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_1 e_{k+4}}{n-k} + \dots + \frac{\beta_1 e_{n+1}}{n-k}, \\ y_2 &= \frac{\alpha_2 e_1}{k+1} + \frac{\beta_2 e_2}{n-k} + \frac{\alpha_2 e_3}{k+1} + \dots + \frac{\alpha_2 e_{k+2}}{k+1} \\ &\quad + \frac{\beta_2 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_2 e_{k+4}}{n-k} + \dots + \frac{\beta_2 e_{n+1}}{n-k}. \end{aligned}$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x , il faut avoir

$$\frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\alpha_2}{k+1}, \quad \frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\beta_2}{n-k}, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

et, par conséquent,

$$\beta_1 = \beta_2,$$

ce qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\alpha_2}{k+1} = \frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\beta_2}{n-k}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{k+1}{n+1}, \quad \beta_1 = \frac{n-k}{n+1},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1}}{n+1},$$

ce qui est le centre de la figure donnée à n dimensions.

On a donc le théorème général :

Dans une figure de la première série et à n dimensions, les $(n+1)^{(k+1)}$ droites, qui joignent les centres de toutes les figures limitantes à k dimensions avec les centres des figures opposées à $(n-k-1)$ dimensions, passent par le centre de la figure donnée et se divisent entre elles suivant la proportion de $(k+1) : (n-k)$.

Ce théorème ne change pas si les $n+1$ sommets de la figure

donnée sont situés dans une étendue à moindre nombre de dimensions. On a, en particulier, si les points sont situés dans l'espace ou dans un plan :

1^o Pour $k = 0$:

Étant donnés $n + 1$ points, les droites qui joignent chacun d'eux avec le centre de gravité des n autres passent par le centre de gravité des $(n + 1)$ points et se divisent entre elles suivant la proportion de $1 : n$.

2^o Pour $k = 1$:

Si l'on joint les $(n + 1)$ points donnés deux à deux par des droites, et le point milieu de chaque droite avec le centre de gravité des $(n - 1)$ autres points, ces dernières $(n + 1)^{(2)}$ droites passent par le centre de gravité des $(n + 1)$ points donnés et se divisent entre elles suivant la proportion de $2 : (n - 1)$, etc.

Il est enfin aisé de voir qu'il y a encore d'autres propriétés du triangle, susceptibles d'être étendues à la figure à n dimensions. Mais il arrive quelquefois que ce n'est pas la figure générale qui a la propriété dont il s'agit, mais une forme spéciale. Nous verrons la même chose dans ce qui suit.

II. — FIGURES DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

Nous nous proposons maintenant d'étendre les propriétés du quadrilatère complet aux autres figures de cette série; mais il faudra auparavant rechercher la figure analogue située sur la droite. C'est, comme dans le premier cas, la partie comprise entre deux points (e_1, e_2) , complétée par deux points harmoniques.

Points harmoniques. — Si deux points x_1 et x_2 sont harmoniques par rapport à e_1 et e_2 , on a

$$(x_1 - x_2) x_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2,$$

$$(x_1 - x_2) x_2 = x_1 e_1 - x_2 e_2;$$

car il suit de ces équations

$$x_1(x_1 - e_1) = x_2(e_2 - x_1),$$

$$x_1(x_2 - e_1) = x_2(x_2 - e_2)$$

ou

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{x_1 - e_1}{e_2 - x_1} = \frac{x_2 - e_1}{x_2 - e_2},$$

ce qui est la relation connue entre les points harmoniques. En outre, on voit que, x_1 étant choisi à volonté, x_2 est complètement déterminé à l'aide des nombres α_1 et α_2 .

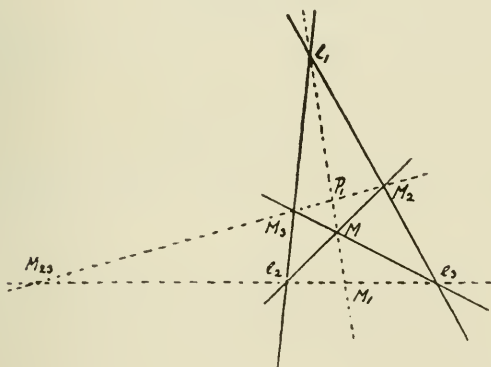
Avec les points A, B, C, on peut former les couples (A, B), (B, C), (C, A). Alors on peut déterminer trois points C_1 , A_1 , B_1 , de façon que les couples

$$(A, B), (C, C_1), (B, C), (A, A_1), (C, A), (B, B_1)$$

soient harmoniques. On peut facilement établir les équations qui expriment ce fait connu.

Quadrilatère complet (fig. 1). — Soit donné (fig. 1) un

Fig. 1.



point M dans le plan d'un triangle $e_1 e_2 e_3$ par l'équation

$$(1) \quad M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (1).$$

Alors les points d'intersection des droites Me_1 , Me_2 , Me_3 avec les arêtes du triangle sont :

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ M_2 = M - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ M_3 = M - \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

(1) Nous omettrons, pour abréger, le facteur numérique à gauche, qui est toujours égal à la somme des facteurs à droite.

On a maintenant trois quadrilatères, $MM_2e_1M_3$, $MM_3e_2M_1$, $MM_1e_3M_2$, dont les troisièmes diagonales sont respectivement e_2e_3 , e_3e_1 , e_1e_2 .

Nous nous bornerons à étudier la première de ces figures, $MM_2e_1M_3$. Les diagonales sont M_2M_3 , Me_1 , e_2e_3 . Les points d'intersection de ces droites sont donnés par les équations

$$(3) \quad \begin{cases} P_1 = M_2 + M_3 &= M + x_1 e_1, \\ M_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 &= M - x_1 e_1, \\ M_{23} = M_2 - M_3 &= x_3 e_3 - x_2 e_2. \end{cases}$$

On voit par ces équations que les couples

$$(P_1M_1, Me_1), (M_1M_{23}, e_2e_3), (M_{23}P_1, M_2M_3)$$

sont harmoniques.

En permutant les indices circulairement, on obtient les mêmes résultats pour les deux autres quadrilatères.

Comme

$$M_{12} + M_{23} + M_{31} = (M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + (M_3 - M_1) = 0,$$

on voit que les points M_{12} , M_{23} , M_{31} sont situés sur la même droite.

Les centres des diagonales M_2M_3 et Me_1 (multipliés par 2) sont

$$(a) \quad (M_2 - M_3) = \frac{x_3 e_3 + x_1 e_1}{x_3 + x_1} + \frac{x_1 e_1 + x_2 e_2}{x_1 + x_2},$$

$$(b) \quad (e_1 + M) = (1 + x_1)e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

On tire de (a)

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_3)(M_2 + M_3) = x_1[x_3 e_3 + x_2 e_2 + (1 + x_1)e_1] + x_2 x_3(e_2 + e_3),$$

ou, à l'aide de (b),

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_3)(M_2 + M_3) = x_1(e_1 + M) + x_2 x_3(e_2 + e_3).$$

Cette équation dit qu'il existe une relation numérique entre les centres $[\frac{1}{2}(M_2 + M_3), \frac{1}{2}(e_1 + M), \frac{1}{2}(e_2 + e_3)]$ des diagonales du quadrilatère complet, ou que ces centres sont situés sur la même droite.

Tous ces résultats sont bien connus, mais il fallait les démontrer ici, en égard à l'analogie des figures à plus de deux dimen-

sions et pour mieux préparer le lecteur aux calculs dont nous allons faire usage.

Ainsi nous allons démontrer l'analogie entre le quadrilatère complet et la figure de quatre points harmoniques sur une droite :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations des points harmoniques

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) x_1 &= x_1 e_1 + x_2 e_2, \\ (x_1 - x_2) x_2 &= x_1 e_1 - x_2 e_2\end{aligned}$$

par e_1 et par e_2 , on obtient (comme $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 0$)

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(x_1 e_1) &= x_2(e_2 e_1), & (x_1 + x_2)(e_2 x_1) &= x_1(e_2 e_1), \\ (x_1 - x_2)(x_2 e_1) &= -x_2(e_2 e_1), & (x_1 - x_2)(x_2 e_2) &= x_1(e_1 e_2). \\ &= x_2(e_1 e_2).\end{aligned}$$

Donc, par division,

$$\frac{(x_1 e_1)}{(e_2 x_1)} = \frac{(x_2 e_1)}{(x_2 e_2)}.$$

En remplaçant $(e_2 x_1)$ par $-(x_1 e_2)$, on peut donner à cette équation la forme

$$\frac{(x_1 e_1)}{(x_1 e_2)} \frac{(x_2 e_2)}{(x_2 e_1)} = -1.$$

Multiplions alors extérieurement les équations du quadrilatère complet $MM_2 e_1 M_3$,

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 & \text{par } (e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_1), \\ M_2 = x_3 e_3 + x_1 e_1 & \text{par } (e_2 e_3) \text{ et } (e_1 e_2), \\ M_3 = x_1 e_1 + x_2 e_2 & \text{par } (e_3 e_1) \text{ et } (e_2 e_3). \end{cases}$$

En ajoutant à gauche les facteurs omis, nous obtiendrons

$$(3) \quad \begin{cases} (M_1 e_1 e_2) = x_3(e_3 e_1 e_2), & (M_1 e_3 e_1) = x_2(e_2 e_3 e_1), \\ (M_2 e_2 e_3) = x_1(e_1 e_2 e_3), & (M_2 e_1 e_2) = x_3(e_3 e_1 e_2), \\ (M_3 e_3 e_1) = x_2(e_2 e_3 e_1), & (M_3 e_2 e_3) = x_1(e_1 e_2 e_3). \end{cases}$$

Or on a

$$(e_1 e_2 e_3) = (e_2 e_3 e_1) = (e_3 e_1 e_2),$$

parce qu'un produit extérieur reste invariable par deux permutations de facteurs voisins.

Donc, par division,

$$(3^a) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{x_3}{x_2}, \quad \frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = \frac{x_1}{x_3},$$

par conséquent

$$(4) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} \frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)} \frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = +1.$$

Comme un produit extérieur de trois points A, B, C représente la double aire du triangle ABC, on voit que la dernière équation établit, entre les triangles du quadrilatère complet, une relation tout à fait analogue à celle qui existe entre les distances des points harmoniques.

Au surplus, on peut vérifier le dernier résultat par une simple réflexion géométrique. On a évidemment

$$\frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{(M_1 e_2)}{(e_3 M_1)} = \frac{z_3}{z_2},$$

et de même les deux autres équations (3^a).

A cause de la relation (4), on peut dire que le groupe des points M_1, M_2, M_3 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3 , d'où résulte le théorème :

Il y a dans le plan un nombre infini de groupes de trois points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3) , chaque quatrième point (M) détermine trois autres points (M_1, M_2, M_3) harmoniques par rapport à (e_1, e_2, e_3) .

2^o Si l'on résout les équations des points harmoniques

$$(z_1 + z_2) x_1 = z_1 e_1 + z_2 e_2,$$

$$(z_1 - z_2) x_2 = z_1 e_1 - z_2 e_2,$$

par rapport à e_1 et e_2 , en posant

$$z_1 + z_2 = 2\beta_1, \quad z_1 - z_2 = 2\beta_2,$$

on aura

$$(\beta_1 + \beta_2) e_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

$$(\beta_1 - \beta_2) e_2 = \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2,$$

ce qui exprime ce théorème connu :

Si le couple x_1, x_2 est harmonique par rapport à (e_1, e_2) , (e_1, e_2) est aussi harmonique par rapport à x_1, x_2 .

De même, en regardant les équations du quadrilatère complet

$$M = \alpha_1 e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) M_1,$$

$$M = \alpha_2 e_2 + (\alpha_3 + \alpha_1) M_2,$$

$$M = \alpha_3 e_3 + (\alpha_1 + \alpha_2) M_3,$$

on voit que les groupes (e_1, e_2, e_3) , (M_1, M_2, M_3) dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3) est harmonique par rapport à (e_1, e_2, e_3) , (e_1, e_2, e_3) est aussi harmonique par rapport à (M_1, M_2, M_3) .

Néanmoins, il faut remarquer que la réciprocité entre les groupes (M_1, M_2, M_3) et (e_1, e_2, e_3) n'est pas aussi complète que celle entre les couples harmoniques (x_1, x_2) et (e_1, e_2) .

On voit, par exemple, que deux points e sont en ligne droite avec un point M , mais non *vice versa*. Il fallait s'attendre à cette circonstance, parce qu'il y a réciprocité sur la droite entre deux points, sur le plan entre un point et une droite ; par conséquent, il faut que la relation réciproque à celle de points soit une relation de droites. En effet, soit

$$\begin{aligned} (e_1 e_2) &= \varepsilon_3, & (e_2 e_3) &= \varepsilon_1, & (e_3 e_1) &= \varepsilon_2, \\ (M_1 M_2) &= \mu_3, & (M_2 M_3) &= \mu_1, & (M_3 M_1) &= \mu_2; \end{aligned}$$

alors on voit que deux droites μ passent par le même point avec une droite ε , ce qui est la relation réciproque à la susdite.

Donc on appellera exactement harmoniques entre eux les couples (e_1, e_2, e_3) , (μ_1, μ_2, μ_3) et (M_1, M_2, M_3) , $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

3° Si l'on pose

$$\alpha_3 = 0$$

dans les équations du quadrilatère complet (1), (2), (3), on voit d'abord que le point e_3 est à l'infini ; puis on aura

$$M = M_3, \quad M_2 = e_1, \quad M_1 = e_2,$$

et les équations restantes sont

$$\alpha_2 e_2 = M_3 - \alpha_1 e_1,$$

$$P_1 = M_3 + \alpha_1 e_1,$$

c'est-à-dire que les neuf points du quadrilatère complet se sont

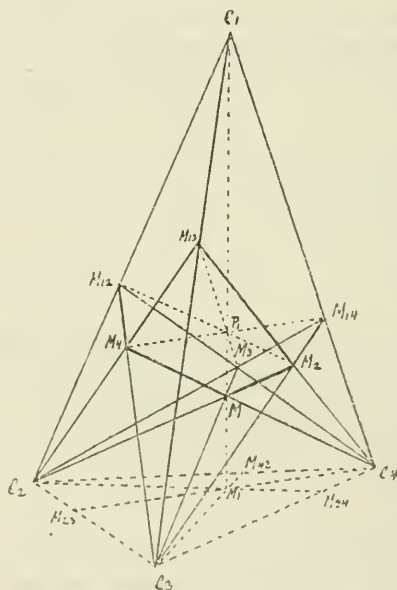
transformés en quatre points harmoniques. Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a le théorème :

Soient donnés deux groupes de trois points harmoniques $(M_1, M_2, M_3), (e_1, e_2, e_3)$. Si un point (e_3) est supposé à l'infini, les autres points coïncident en trois points (e_1, M_3, e_2) d'une droite, et la figure du quadrilatère complet, dont P_1 est le point d'intersection des diagonales M_2M_3 et M_1e_1 , se transforme en la figure des couples harmoniques $(M_3, e_1), (e_2, P_1)$.

Hexaèdre complet (fig. 2). — Soit donné un point M dans un tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ par l'équation

$$(1) \quad M = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4.$$

Fig. 2.



Alors les points d'intersection des droites Me_1, Me_2, Me_3, Me_4 avec les faces du tétraèdre sont

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = M - x_1 e_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \\ M_2 = M - x_2 e_2 = x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_1 e_1, \\ M_3 = M - x_3 e_3 = x_4 e_4 + x_1 e_1 + x_2 e_2, \\ M_4 = M - x_4 e_4 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \end{array} \right.$$

Soit rst une permutation quelconque des nombres 2, 3, 4. Alors les six droites $e_r M_s$ coupent les arêtes e_t suivant les *trois* points M_{1t} ; car on a

$$(3) \quad \begin{cases} M_{12} = M_3 - \alpha_4 e_4 = M_4 - \alpha_3 e_3 = M - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_{13} = M_4 - \alpha_2 e_2 = M_2 - \alpha_4 e_4 = M - \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3, \\ M_{14} = M_2 - \alpha_3 e_3 = M_3 - \alpha_2 e_2 = M - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_4 e_4. \end{cases}$$

Or les droites $e_1 M$, $M_{12} M_2$, $M_{13} M_3$, $M_{14} M_4$ sont les axes diagonaux d'un hexaèdre qui est une partie du tétraèdre donné. Il y a encore trois autres hexaèdres qui en dérivent. Pour les obtenir, il faut changer trois fois circulairement les indices des axes du premier. En étudiant le premier hexaèdre, nous verrons immédiatement que ces corps, contrairement à ce qu'il fallait attendre, ne représentent pas le cas général d'un hexaèdre.

D'après les équations (2) et (3), les droites MM_2 , $e_1 M_{12}$, $M_4 M_{13}$, $M_3 M_{14}$ passent par le point e_2 ; car on a

$$\begin{aligned} M_2 &= M - \alpha_2 e_2, & M_{12} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_{13} &= M_4 - \alpha_2 e_2, & M_{14} &= M_3 - \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\alpha_2 e_2 = M - M_2 = M_{12} - \alpha_1 e_1 = M_4 - M_{13} = M_3 - M_{14}.$$

De même

$$\begin{aligned} \alpha_3 e_3 &= M - M_3 = M_{13} - \alpha_1 e_1 = M_2 - M_{14} = M_4 - M_{12}, \\ \alpha_4 e_4 &= M - M_4 = M_{14} - \alpha_1 e_1 = M_3 - M_{12} = M_2 - M_{13}. \end{aligned}$$

Or la troisième série est une conséquence des deux précédentes, ce qu'on voit en regardant les équations

$$M - M_2 = M_4 - M_{13}, \quad M - M_3 = M_4 - M_{12}, \quad M_{13} - \alpha_1 e_1 = M_2 M_{14}.$$

On a donc ce théorème :

Soient aa' , bb' , cc' six plans formant un hexaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre plans bb' , cc' passent par le même point (e_2) et les plans aa' , cc' par le même point (e_3), les plans aa' , bb' passent aussi par le même point (e_4).

En d'autres termes : *Si les sommets d'un hexaèdre sont situés deux à deux sur les droites de deux faisceaux de quatre rayons, il existe encore un troisième faisceau qui a la même propriété.*

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), si nous posons

$$P_1 = 2x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4.$$

$$(4) \quad P_1 = M + x_1e_1 = M_2 + M_{12} = M_3 + M_{13} = M_4 + M_{14},$$

c'est-à-dire que les axes de cet hexaèdre passent par le même point (P_1).

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \quad x_1 = 1, \quad \text{d'où} \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$

l'axe Me_1 est divisé en parties égales par le point P_1 . De même, l'axe M_2M_{12} si

$$(b) \quad x_2 = x_3 + x_4$$

(car, en ce cas, les coefficients des points M_2 et M_{12} sont égaux entre eux). Des deux conditions (a) et (b), il suit

$$(c) \quad x_2 = x_3 + x_4 = 0,$$

c'est-à-dire que le point e_2 est à l'infini.

L'axe M_3M_{13} est divisé de même si

$$(d) \quad x_3 = x_2 - x_4.$$

On tire de (c) et (d)

$$x_3 = x_4 = 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, e_3 et e_4 sont aussi à l'infini, et l'axe M_4M_{14} est divisé comme les autres. On a donc ce théorème :

Si les axes d'un hexaèdre passent par le même point et si trois axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même du quatrième, et l'hexaèdre est un parallélépipède.

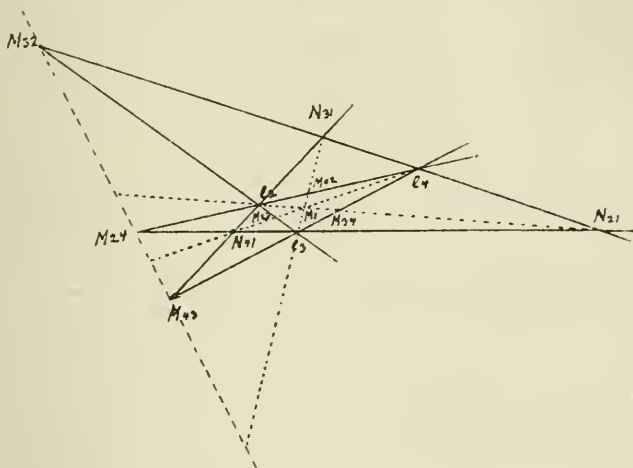
Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que du simple hexaèdre. Les six faces de ce corps, étendues jusqu'à leurs points d'intersection (e_2, e_3, e_4), forment un *hexaèdre complet*, dont chaque face est un quadrilatère complet. Les troisièmes diagonales de ces six quadrilatères, deux à deux coïncidentes, sont les droites e_2e_3 , e_3e_4 , e_4e_2 . Nous appellerons les points e_2, e_3, e_4 *sommets secondaires*, les droites e_2e_3, e_3e_4, e_4e_2 *axes secondaires*, le plan $e_2e_3e_4$ *plan diagonal secondaire* (7^e) de l'hexaèdre complet.

Si l'on construit les diagonales principales des faces de l'hexaèdre,

chaque plan diagonal principal est aussi un quadrilatère complet avec ses trois diagonales.

Les diagonales principales des six faces rencontrent les trois

Fig. 3.



sièmes diagonales, suivant les points (fig. 3)

$$(5) \quad \begin{cases} M_{34} = M_2 - \alpha_1 e_1 = M - M_{12} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \\ M_{42} = M_3 - \alpha_1 e_1 = M - M_{13} = \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2, \\ M_{23} = M_4 - \alpha_1 e_1 = M - M_{14} = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} M_{43} = M_{14} - M_{13} = M_3 - M_1 = \alpha_4 e_4 - \alpha_3 e_3, \\ M_{24} = M_{12} - M_{14} = M_4 - M_2 = \alpha_2 e_2 - \alpha_4 e_4, \\ M_{32} = M_{13} - M_{12} = M_2 - M_3 = \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

Comme

$$M_{43} + M_{24} + M_{32} = 0,$$

il en résulte que ces trois points sont situés sur la même droite.

On a, en outre,

$$(6^a) \quad \begin{cases} -M_{32} = M_{24} + M_{43}, \\ M_1 - 3\alpha_4 e_4 = M_{24} - M_{43}, \end{cases}$$

et deux autres couples d'équations par le changement des indices 2, 3, 4, d'où résulte que les droites $M_1 e_2$, $M_1 e_3$, $M_1 e_4$ rencontrent la droite des points M_{43} , M_{24} , M_{32} , suivant les quatrièmes points harmoniques conjugués à M_{43} , M_{24} , M_{32} .

Posons

$$(7) \quad \begin{cases} N_{21} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_2 = M_{32} + \alpha_4 e_4 = \alpha_3 e_3 - M_{24}, \\ N_{31} = \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = M_{43} + \alpha_2 e_2 = \alpha_4 e_4 - M_{32}, \\ N_{41} = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = M_{24} + \alpha_3 e_3 = \alpha_2 e_2 - M_{43}. \end{cases}$$

On voit, par ces équations, que les droites $M_{43}e_2$, $M_{24}e_3$, $M_{32}e_4$ forment un triangle dont les sommets sont les points N_{21} , N_{31} , N_{41} , et qu'il y a les couples harmoniques

$$(M_{43}e_2, N_{31}N_{41}), \quad (M_{24}e_3, N_{41}N_{21}), \quad (M_{32}e_4, N_{21}N_{31}).$$

Le triangle $N_{21}N_{31}N_{41}$ est circonscrit à $e_2e_3e_4$; le triangle $M_{23}M_{34}M_{42}$ est inscrit; d'où résultent des quadrilatères trois fois complets.

Les trois plans diagonaux passant par le sommet e_1 rencontrent le plan diagonal secondaire suivant les droites e_2M_{34} , e_3M_{42} , e_4M_{23} ; les trois autres plans diagonaux rencontrent le même plan suivant les droites e_2M_{43} , e_3M_{24} , e_4M_{32} (1).

Nous avons remarqué qu'il y a des points harmoniques sur toutes les arêtes et diagonales du quadrilatère complet. De même il y a des quadrilatères complets sur toutes les faces et plans diagonaux de l'hexaèdre complet. Le septième plan diagonal (secon-

(1) Pour démontrer ces propositions, posons

$$(e_1e_2e_3e_4) = 1.$$

Alors (1) un des plans passant par e_1 est

$$(e_1e_2M_1) = \alpha_3(e_1e_2e_3) + \alpha_4(e_1e_2e_4),$$

et le plan diagonal secondaire est

$$(e_2e_3e_4).$$

Multipliant ces deux expressions et omettant le facteur

$$(e_1e_2e_3e_4),$$

on obtient

$$\alpha_3(e_2e_3) + \alpha_4(e_2e_4),$$

ce qui est égal à

$$(e_2M_{34}).$$

Donc cette ligne est la ligne d'intersection des deux plans. (2) Un des autres plans est

$$(M_{12}M_{13}e_4) = \alpha_1\alpha_3(e_1e_3e_4) + \alpha_2\alpha_1e_2e_4e_1 + \alpha_2\alpha_3e_2e_3e_1.$$

En opérant comme ci-dessus on obtient

$$\alpha_1\alpha_3(e_3e_4) = \alpha_2\alpha_1(e_2e_4) = \alpha_1e_1M_{34},$$

ce qu'il fallait démontrer.

daire) correspond à la troisième diagonale. Pour compléter cette analogie, nous répétons les réflexions faites sur le quadrilatère :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations de l'hexaèdre complet

$$\begin{aligned} (1) \quad & M_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 \quad \text{par } (e_1 e_2 e_3) \text{ et } (e_4 e_1 e_2), \\ (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} M_2 = x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_1 e_1 \quad \text{par } (e_2 e_3 e_4) \text{ et } (e_1 e_2 e_3), \\ M_3 = x_4 e_4 + x_1 e_1 + x_2 e_2 \quad \text{par } (e_3 e_4 e_1) \text{ et } (e_2 e_3 e_4), \\ M_4 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad \text{par } (e_4 e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_4 e_1), \end{array} \right. \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} (M_1 e_1 e_2 e_3) &= x_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), & (M_1 e_4 e_1 e_2) &= x_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), \\ (M_2 e_2 e_3 e_4) &= x_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), & (M_2 e_1 e_2 e_3) &= x_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), \\ (M_3 e_3 e_4 e_1) &= x_2 (e_2 e_3 e_4 e_1), & (M_3 e_2 e_3 e_4) &= x_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), \\ (M_4 e_4 e_1 e_2) &= x_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), & (M_4 e_3 e_4 e_1) &= x_2 (e_2 e_3 e_4 e_1). \end{aligned}$$

et, par les mêmes opérations que plus haut, il vient

$$(8) \quad \frac{(M_1 e_1 e_2 e_3)}{(M_1 e_4 e_1 e_2)} \frac{(M_4 e_4 e_1 e_2)}{(M_4 e_3 e_4 e_1)} \frac{(M_3 e_3 e_4 e_1)}{(M_3 e_2 e_3 e_4)} \frac{(M_2 e_2 e_3 e_4)}{(M_2 e_1 e_2 e_3)} = 1.$$

Comme un produit extérieur de quatre points A, B, C, D représente le triple volume du tétraèdre ABCD, on voit que la dernière équation établit entre les tétraèdres de l'hexaèdre complet une relation analogue aux précédentes. On peut aussi, d'une façon analogue, vérifier cette relation par des considérations géométriques.

A cause de la relation (8), on dira que le groupe des points M_1, M_2, M_3, M_4 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3, e_4 ; alors on a ce théorème :

Il y a dans l'espace un nombre infini de groupes de quatre points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3, e_4) , chaque cinquième point (M) détermine quatre autres points (M_1, M_2, M_3, M_4) harmoniques par rapport à (e_1, e_2, e_3, e_4) .

2° Des équations (2), il résulte que les groupes $(e_1, e_2, e_3, e_4), (M_1, M_2, M_3, M_4)$ dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3, M_4) est harmonique par rapport à (e_1, e_2, e_3, e_4) , (e_1, e_2, e_3, e_4) est aussi harmonique par rapport à (M_1, M_2, M_3, M_4) .

Si nous posons

$$(e_r e_s e_t) = \varepsilon_u, \quad (M_r M_s M_t) = \mu_u,$$

$rstu$ étant une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, il y a une complète réciprocité : 1° entre les points e et les plans μ ; 2° entre les points M et les plans ε .

3° Si l'on pose

$$\alpha_4 = 0$$

dans les équations de l'hexaèdre complet (1), (2), (3), (4), (5), le point e_4 est à l'infini; on aura ensuite

$$\begin{aligned} M &= M_4, \\ M_2 &= M_{13}, \quad M_{12} = e_2, \\ M_3 &= M_{12}, \quad M_{34} = e_3, \\ M_1 &= M_{23}, \quad M_{14} = e_1, \end{aligned}$$

et les équations restantes sont

$$\begin{aligned} M_4 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, & M_{23} &= \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ P_1 &= M_4 + \alpha_1 e_1, & M_{13} &= \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ & & M_{12} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les seize points de l'hexaèdre complet se sont transformés en huit points qui deviennent les neuf points d'un quadrilatère complet, si on leur ajoute le point M_{32} (6). Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a ce théorème :

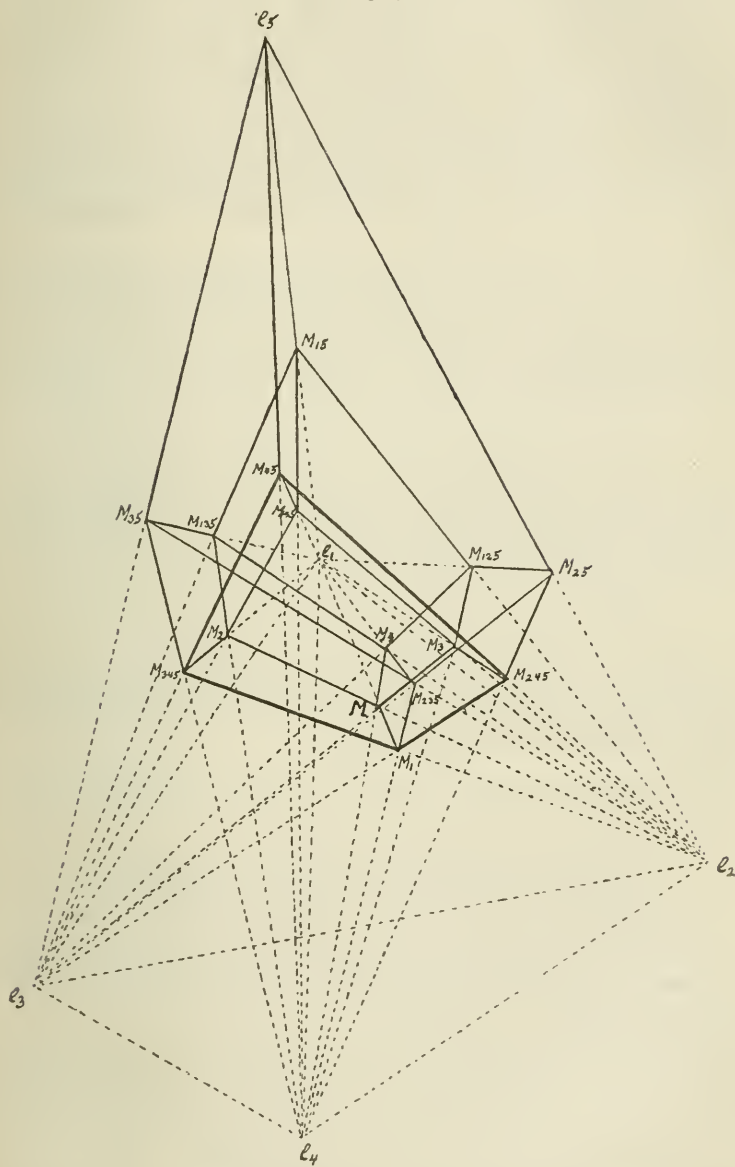
Soient donnés deux groupes de quatre points harmoniques (M_1, M_2, M_3, M_4) , (e_1, e_2, e_3, e_4) . Si un point (e_4) est supposé à l'infini, les autres forment deux groupes de trois points harmoniques avec le point M , et la figure de l'hexaèdre complet, dont $e_1 M_2 M_3 M_4$ sont quatre sommets, se transforme en la figure d'un quadrilatère complet.

Octaédroïde complet (fig. 4). — Nous appelons *octaédroïde* la figure à quatre dimensions qui est limitée par huit hexaèdres dont chaque fois quatre ont un sommet commun. Cette figure a seize sommets, trente-deux arêtes, vingt-quatre faces.

La projection d'un octaédroïde dans l'espace peut être effectuée de plusieurs manières. La plus commode est la suivante : on construit un hexaèdre au dedans d'un autre, de sorte que les faces de

l'un soient situées vis-à-vis de celles de l'autre, et l'on joint par

Fig. 4.



des droites les sommets des deux corps deux à deux opposés.

Nous avons vu que les figures complètes du quadrilatère et de l'hexaèdre tirent leur origine du triangle et du tétraèdre. Ainsi de chacune des figures de la première série résulte une figure complète de la deuxième série, et nous allons voir que l'on passe du pentaédroïde à la figure de l'octaédroïde complet par des constructions tout à fait analogues aux précédentes.

Quoiqu'il soit impossible de se faire une idée de ces figures, on peut aisément effectuer ces constructions en opérant sur les projections des figures dans l'espace, ou même sur les projections sur le plan.

On remarque aussi que l'existence (idéale) des figures de la première série entraîne celle des figures de la deuxième série.

Pour construire l'octaédroïde complet, soit donné un point M dans un pentaédroïde $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ par l'équation

$$(1) \quad M = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_5 e_5.$$

Alors les cinq points d'intersection des droites $Me_1, Me_2, \dots, Me_5$ avec les tétraèdres limitants $e_2 e_3 e_4 e_5, e_1 e_3 e_4 e_5, \dots, e_1 e_2 e_3 e_4$, qui sont situés vis-à-vis des points $e_1, e_2, \dots, e_5$, sont

$$(2) \quad M_1 = M - x_1 e_1 = x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5, \dots$$

Comme le point M_1 est situé dans le tétraèdre $e_2 e_3 e_4 e_5$, on peut construire les droites $M_1 e_2, M_1 e_3, M_1 e_4, M_1 e_5$, qui rencontrent les faces opposées aux quatre points

$$(3) \quad M_{345} = M_1 - x_2 e_2 = M - x_1 e_1 - x_2 e_2 = x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5 = M_2 - x_1 e_1, \dots$$

Comme dans les formules (3) on peut remplacer le point M_1 par $M_2, \dots, M_5$, le système (3) comprend vingt formules; mais les points représentés par ces formules coïncident deux à deux, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pqr} , ce qu'on voit aussi immédiatement, comme il n'y a que $5^3 = 10$ combinaisons de cinq nombres trois à trois.

Enfin, on construit dans la face $e_3 e_4 e_5$ les droites $M_{345} e_3, M_{345} e_4, M_{345} e_5$, qui rencontrent les arêtes opposées aux trois points

$$(4) \quad \begin{cases} M_{45} = M_{345} - x_3 e_3 = M_1 - x_2 e_2 - x_5 e_5 = M - x_1 e_1 - x_2 e_2 - x_3 e_3 \\ \quad = x_4 e_4 + x_5 e_5 = M_{245} - x_2 e_2 = M_{145} - x_1 e_1, \dots \end{cases}$$

Comme dans les formules (4), on peut remplacer le point M_{345} par les neuf autres points M_{pqr} ; le système (4) comprend trente formules, mais les points représentés coïncident trois à trois, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pqr} .

Alors le pentaédroïde est décomposé en cinq octaédroïdes. Les constructions précédentes se simplifient, si l'on veut construire seulement un octaédroïde. Alors, par exemple, on omettra le point M_5 et les constructions faites sur le tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ et ses faces; donc on n'a que les points

$$\begin{aligned} (2) & \quad M_1, M_2, M_3, M_4; \\ (3) & \quad M_{125}, M_{135}, M_{235}, M_{145}, M_{245}, M_{345}; \\ (4) & \quad M_{15}, M_{25}, M_{35}, M_{45}, \end{aligned}$$

qui font ensemble, avec les points M, e_5 les seize sommets de l'octaédroïde

$$(5) \quad \begin{cases} e_5 & M_{35} & M_{345} & M_{45} & M_{235} & M_{25} & M_{245} & M_1 \\ M & M_3 & M_{125} & M_4 & M_{145} & M_2 & M_{135} & M_{15}. \end{cases}$$

Si l'on construit la projection de l'octaédroïde de la manière susdite, la première ligne de (5) donne les sommets de l'hexaèdre extérieur; la seconde, les sommets de l'intérieur. Les points symétriques de la même ligne sont les sommets opposés de l'hexaèdre; les points symétriques de lignes différentes sont les sommets des hexaèdres qu'il faut joindre pour obtenir la figure de l'octaédroïde. Enfin deux points situés l'un sous l'autre sont des sommets opposés de l'octaédroïde.

D'après les équations (2), (3), (4), les quatre couples de droites

$$\begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \\ M & M_2, & M_{345} M_1, & M_{145} M_3, \\ M_{125} M_{15}, & M_{245} M_{45}, & M_{235} M_{35}, & e_5 M_{25} \end{array}$$

ou les six faisceaux de rayons 12, 13, 14, 23, 24, 34 passent par le point e_2 . On peut aussi dire que le point e_2 est commun aux six corps (espaces) limitant l'octaédroïde, qui contiennent les six faisceaux susdits, ou que ces corps (espaces) limitants passent par le point e_2 .

Cette relation est représentée par les équations

$$\begin{aligned} \alpha_2 e_2 = M & - M_2 = M_1 - M_{345} = M_3 - M_{145} = M_4 - M_{135} \\ & = M_{125} - M_{15} = M_{245} - M_{45} = M_{235} = M_{35} = M_{25} - \alpha_5 e_5. \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}
 \alpha_3 e_3 &= M - M_3 = M_2 - M_{415} = M_4 - M_{215} = M_1 - M_{245} \\
 &= M_{235} - M_{25} = M_{315} - M_{15} = M_{345} - M_{45} = M_{35} - \alpha_5 e_5, \\
 \alpha_4 e_4 &= M - M_4 = M_3 - M_{125} = M_1 - M_{325} = M_2 - M_{315} \\
 &= M_{345} - M_{35} = M_{425} - M_{25} = M_{415} - M_{15} = M_{45} - \alpha_5 e_5, \\
 \alpha_5 e_5 &= M - M_5 = M_4 - M_{235} = M_2 - M_{435} = M_3 - M_{425} \\
 &= M_{415} - M_{45} = M_{135} - M_{35} = M_{125} - M_{25} = M_{15} - \alpha_5 e_5.
 \end{aligned}$$

Or le dernier groupe d'équations est une conséquence des précédents ; donc on a le théorème :

Soient aa' , bb' , cc' , dd' huit espaces, formant un octaédroïde, deux à deux opposés. Si les six espaces aa' , bb' , cc' passent par le même point (e_3), les six espaces aa' , bb' , cc' par le même point (e_4) et les six espaces aa' , cc' , dd' par le même point (e_3), les espaces bb' , cc' , dd' passent aussi par le même point (e_5).

En d'autres termes : *Si les seize sommets d'un octaédroïde sont situés deux à deux sur trois faisceaux de huit rayons, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.*

Ce théorème ne change pas, si l'on remplace l'octaédroïde par ses projections dans l'espace ou dans le plan. Alors on peut dire :

Si, dans l'espace ou dans le plan, trois faisceaux de huit rayons passent par les mêmes seize points, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), (4), si nous posons

$$\begin{aligned}
 P_5 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + 2\alpha_5 e_5, \\
 (6) \quad \left\{ \begin{aligned} P_5 &= M + \alpha_5 e_5 = M_3 + M_{35} = M_{125} + M_{345} = M_4 + M_{45} \\ &= M_{235} + M_{145} = M_2 + M_{25} = M_{245} + M_{135} = M_1 + M_{15}, \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les axes de cet octaédroïde passent par le même point (p_5).

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \quad \alpha_5 = 1 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0),$$

l'axe Me_5 est divisé en parties égales par le point e_5 . De même l'axe $M_1 M_{15}$, si

$$(b) \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4,$$

De (a) et (b), il suit

$$(c) \quad x_1 = 0 = x_2 + x_3 + x_4,$$

c'est-à-dire que le point e_1 est à l'infini. L'axe M_2M_{25} est divisé de même, si

$$(a) \quad x_2 = x_3 + x_4.$$

De (c) et (d), il suit

$$(e) \quad x_2 = 0 = x_3 + x_4;$$

donc e_2 est à l'infini. Enfin l'axe M_3M_{35} est divisé en parties égales, si

$$(f) \quad x_3 = x_4,$$

d'où il suit que

$$x_3 = 0 = x_4.$$

En ce cas, e_3 et e_4 sont à l'infini, et l'on a ce théorème :

Si les axes d'un octaédroïde passent par le même point et si quatre axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même des autres quatre axes.

Dans l'étendue à quatre dimensions, deux espaces ou « se coupent » suivant un plan, ou sont « parallèles », c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de points communs. Donc on peut ajouter, au dernier théorème, que les espaces opposés de notre octaédroïde sont parallèles deux à deux.

Les huit axes de l'octaédroïde sont situés deux à deux dans un plan. Le nombre de ces plans (quadrilatères) est $8^{(2)} = 28$. De ces quadrilatères, *seize* sont formés par deux arêtes de l'octaédroïde et deux axes d'un hexaèdre limitant, *douze* par quatre diagonales des quadrilatères limitants. Nous appellerons les seize plans de la première espèce *plans diagonaux* de l'octaédroïde.

Ensuite les huit axes de l'octaédroïde sont situés trois à trois dans un espace. Le nombre de ces espaces (hexaèdres) est $8^{(3)} = 56$. De ces hexaèdres, *douze* sont formés par deux faces de l'octaédroïde et quatre plans diagonaux des hexaèdres limitants. Nous les appellerons *espaces (corps) diagonaux* de l'octaédroïde. Mais en chacun de ces douze hexaèdres coïncident quatre des cinquante-six corps susdits, puisque chaque fois quatre axes sont réunis dans le même espace. On a donc, outre les corps diagonaux,

encore $56 - 4 \cdot 12 = 8$ autres hexaèdres, qui coïncident en deux, formés par les douze plans susdits.

Chacun des huit corps limitant l'octaédroïde est un hexaèdre dont les axes passent par un point et qui devient complet par les constructions qui produisent les trois autres octaédroïdes. Deux hexaèdres opposés ont chaque fois les mêmes trois sommets secondaires, savoir

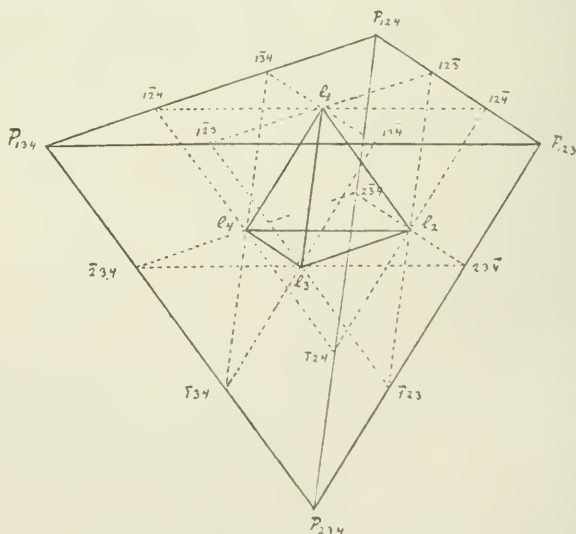
$$e_1 e_2 e_3, e_2 e_3 e_4, e_3 e_4 e_1, e_4 e_1 e_2,$$

Donc les quatre plans déterminés par ces points sont les plans diagonaux secondaires des huit hexaèdres, et le tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ est le *corps diagonal secondaire* (13°) de l'octaédroïde.

Les axes des huit hexaèdres rencontrent les septièmes plans diagonaux dans les points (fig. 5)

$$\begin{aligned} (7) \quad M_{341} &= M - M_{25} = M_2 - \alpha_5 e_5 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1; \\ (8) \quad \begin{cases} M_{\bar{3}41} = M_3 - M_{235} = M_{145} - M_{35} = -\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_{3\bar{4}1} = M_4 - M_{245} = M_{135} - M_{45} = \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_{34\bar{1}} = M_1 - M_{215} = M_{345} - M_{15} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_1 e_1, \end{cases} \end{aligned}$$

Fig. 5.



où il faut encore changer [trois fois circulairement les indices 1, 2, 3, 4.

De ces équations, on tire

$$M_{341} - M_{34\bar{1}} = M_{\bar{3}41} + M_{3\bar{4}1} = 2\alpha_1 e_1$$

et deux équations analogues. Donc les droites qui joignent les sommets du triangle $M_{\bar{3}41} M_{3\bar{4}1} M_{34\bar{1}}$ avec le point M_{341} rencontrent les arêtes opposées suivant les points e_1, e_3, e_4 . Tous ces points donnent lieu à un quadrilatère trois fois complet.

Puis on a

$$M_{\bar{3}41} + M_{\bar{4}21} + M_{\bar{2}31} = 3\alpha_1 e_1,$$

$$M_{3\bar{4}1} + M_{4\bar{2}1} + M_{2\bar{3}1} = 3\alpha_1 e_1,$$

d'où il suit que ces sept points sont situés dans le même plan. Il y a, en tout, quatre plans de cette sorte, qui forment un tétraèdre circonscrit au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$. Les deux tétraèdres donnent lieu à un hexaèdre quatre fois complet. Les quatre couples de faces correspondantes de ces tétraèdres déterminent quatre droites situées dans un plan et formant un quadrilatère correspondant au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$.

Les points $M_{123}, M_{124}, M_{234}, M_{341}$ forment un tétraèdre inscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$, et les quatre droites qui joignent deux sommets correspondants de ces tétraèdres passent par le point M_5 .

Les sommets du tétraèdre circonscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$ sont déterminés par l'équation

$$(9) P_{124} = 2M_{1\bar{3}4} - M_{1\bar{2}4} = 2M_{12\bar{3}} - M_{12\bar{4}} = 2M_{\bar{3}24} - M_{\bar{1}24} = M_5 - 3\alpha_3 e_3$$

et trois autres qui en naissent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4.

Six faces de l'octaèdroïde passent par le point e_5 ; donc l'axe passant par e_5 est situé dans six espaces diagonaux, c'est-à-dire dans $Me_5 M_{5r} M_{5s}$, où rs est une des six combinaisons des nombres 1, 2, 3, 4. (Les six autres corps diagonaux sont

$$M_{15} M_1 M_{1r5} M_{1s5},$$

$$M_{r5} M_r M_{rs5} M_{rt5},$$

où $r, s, t = 2, 3, 4$.)

Si l'on multiplie les espaces $(Me_5 M_{53} M_{54})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, en posant

$$(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5) = 1,$$

on obtient

$$\alpha_3 \alpha_4 (e_3 e_4 M_{12}).$$

Donc les six espaces diagonaux passant par e_5 rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans $(e_r e_s M_{tu})$, où $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$. Ces plans coïncident avec les plans $(M_{rs} M_{rst} M_{rsu})$, ce qui se voit, si l'on remplace M_{rs} , M_{rst} , M_{rsu} par leurs valeurs et que l'on effectue la multiplication. En outre, ces plans passent par le point M_5 .

Si l'on multiplie, d'autre part, $(M_{15} M_1 M_{135} M_{145})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, on obtient

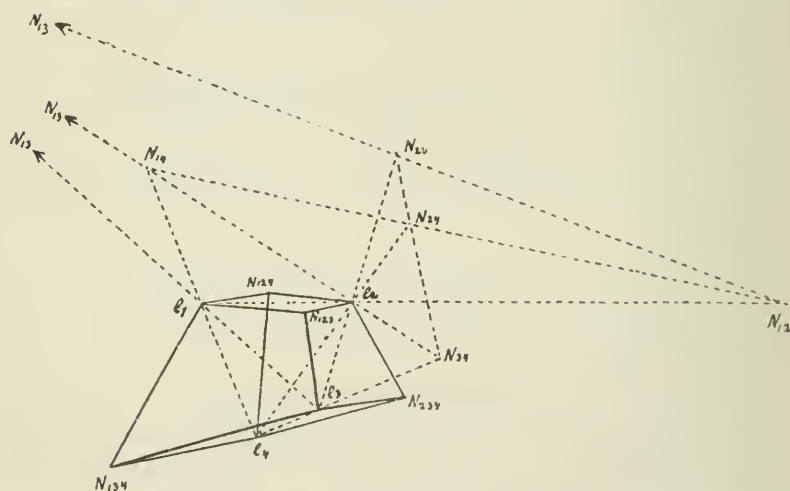
$$\alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2) \overline{e_3 e_4}.$$

Donc, en posant

$$(10) \quad N_{rs} = \alpha_r e_r - \alpha_s e_s \quad (1),$$

les six autres espaces diagonaux rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans $(N_{rs} e_t e_u)$, où $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$.

Fig. 6.



Ces plans, passant comme les précédents par les arêtes du tétraèdre 1234, forment un hexaèdre circonscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$ (fig. 6).

(1) On a

$$\begin{aligned} N_{rs} + N_{st} + N_{tr} &= 0, \\ N_{rs} + N_{st} + N_{tu} + N_{ur} &= 0; \end{aligned}$$

donc chaque fois trois points sont situés sur une droite et quatre dans un plan. Par conséquent les six points N_{rs} forment un quadrilatère complet.

Les quatre autres sommets de cet hexaèdre sont déterminés par l'équation

$$(11) \quad N_{123} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4$$

et trois autres qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4. Les axes de cet hexaèdre se rencontrent au point M_5 .

On remarque que les points M_{rs} et N_{rs} sont harmoniques par rapport à $e_r e_s$, et que les droites $e_1 M_{23\bar{4}}$, $e_2 M_{13\bar{4}}$, $e_3 M_{12\bar{4}}$, $e_4 M_{123}$, $M_{12} N_{34}$, $M_{13} N_{24}$, $M_{23} N_{14}$ passent par le point N_{123} ; car on peut, par exemple, écrire

$$N_{123} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4) = M_{12} + N_{34}.$$

Enfin on peut démontrer, par des calculs analogues aux précédents, l'analogie qui existe entre l'octaédroïde et l'hexaèdre complet.

En permutant partout les indices 1, 2, 3, 4, 5, on obtient les quatre autres octaédroïdes qui se déduisent du pentaédroïde donné. Chaque octaédroïde a pour treizième corps diagonal un des tétraèdres limitant le pentaédroïde.

Les corps limitant les deux pentaédroïdes $e_1 \dots e_5$, $M_1 \dots M_5$ sont deux à deux opposés et se rencontrent en cinq plans, dont l'un est

$$(M_1 M_2 M_3 M_4) (e_1 e_2 e_3 e_4)$$

ou, les coefficients omis,

$$e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 + e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2.$$

Ces cinq plans sont situés dans le même espace et forment un corps correspondant au pentaédroïde donné.

Figure à n dimensions. — Dans une figure à n dimensions se trouvent des sommets, arêtes, faces (quadrilatères), corps (hexaèdres), etc. Le nombre des figures limitantes à k dimensions est

$$2^{n-k} n^{(k)}.$$

Par conséquent, il y a

$$2^n \quad \text{1 sommets,}$$

$$2^{n-1} n \quad \text{arêtes,}$$

$$2^{n-2} n^{(2)} \quad \text{faces, etc. (1).}$$

(1) Pour $k = n - 1$ on obtient $2n$ en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14).

Le nombre des figures diagonales à $(k + 1)$ dimensions est

$$2^{n-k-1} n^{(k)}.$$

La figure complète se réalise par des constructions tout à fait analogues aux précédentes. Nous ajoutons encore ce théorème :

Si les 2^n sommets d'une figure à n dimensions (deuxième série) sont situés deux à deux sur $(n - 1)$ faisceaux de 2^{n-1} rayons, il existe encore un $n^{\text{ième}}$ faisceau qui a la même propriété. Les axes de cette figure passent par le même point.

Ce théorème subsiste encore si les 2^n points sont situés dans le même plan ou dans l'espace.

III. — FIGURES DE LA TROISIÈME SÉRIE.

Les figures de cette série s'obtiennent par des constructions précisément réciproques à celles de la précédente ⁽¹⁾ :

1° Dans le plan, le point est réciproque à la droite; donc la figure réciproque au quadrilatère est également un quadrilatère;

2° Dans l'espace, le point est réciproque au plan et la droite à elle-même; donc la figure réciproque à l'hexaèdre est l'octaèdre. De ce que le tétraèdre est réciproque à lui-même, on peut déduire l'octaèdre du tétraèdre par les constructions réciproques à celles qui s'employaient pour en déduire l'hexaèdre.

A cet effet, soient (*fig. 7*)

$$\varepsilon_1 = (e_2 e_3 e_4), \quad \varepsilon_2 = (e_3 e_4 e_1),$$

$$\varepsilon_3 = (e_4 e_1 e_2), \quad \varepsilon_4 = (e_1 e_2 e_3)$$

les quatre faces d'un tétraèdre et

$$v_1 = (M_{12} M_{13} M_{14})$$

un plan qui rencontre les plans $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ suivant les droites $M_{13} M_{14}, M_{14} M_{12}, M_{12} M_{13}$ et le plan ε_1 suivant une quatrième

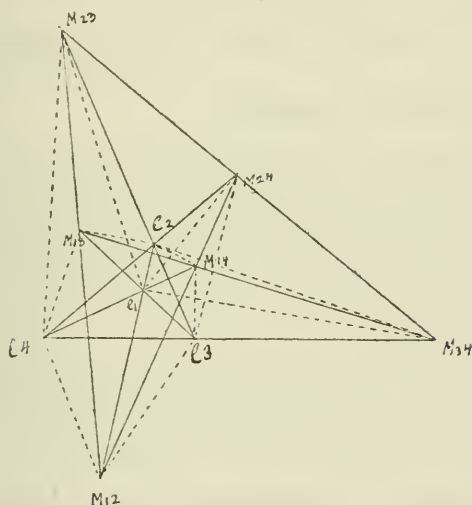
⁽¹⁾ On remarque que les figures réciproques à celles de la première série sont les mêmes figures, et que le nombre des sommets $(n - 1)$ est égal à celui des figures limitantes à $(n - 1)$ dimensions.

droite m , et construisons les plans

$$\begin{aligned}\mu_2 &= M_{13} M_{14} e_2, \\ \mu_3 &= M_{14} M_{12} e_3, & \mu_1 &= m e_1, \\ \mu_4 &= M_{12} M_{13} e_4,\end{aligned}$$

Le plan μ_r rencontre les trois faces du tétraèdre passant par e_r , suivant trois droites ($e_r M_{1s}$, $e_r M_{1t}$ et une troisième). Chacune de ces trois droites détermine avec la ligne d'intersection des deux

Fig. 7.



autres faces ($e_r e_s$, $e_r e_t$ et une troisième) un plan (ε_{ut} , ε_{us} et un troisième). Alors ν_1 et ε_u sont deux faces opposées de quatre octaèdres, dont les sommets sont les points

$$\begin{aligned}e_2 e_3 e_4 M_{12} M_{13} M_{14}, \\ e_3 e_4 e_1 M_{23} M_{24} M_{21}, \\ e_4 e_1 e_2 M_{34} M_{31} M_{32}, \\ e_1 e_2 e_3 M_{41} M_{42} M_{43}.\end{aligned}$$

(les six points M_{rs} forment un quadrilatère complet).

L'un de ces octaèdres a pour couples de faces opposées

$$\varepsilon_1 \nu_1, \varepsilon_{12} \mu_2, \varepsilon_{13} \mu_3, \varepsilon_{14} \mu_4$$

ou

$$\begin{aligned}(e_2 e_3 e_4)(M_{12} M_{13} M_{14}), & (M_{12} e_3 e_4)(e_2 M_{13} M_{14}), \\ (M_{13} e_2 e_4)(e_3 M_{12} M_{14}), & (M_{14} e_2 e_3)(e_4 M_{12} M_{13}).\end{aligned}$$

Cet octaèdre a, comme les autres, la propriété que les quatre droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

En outre, comme les trois axes passent évidemment par le même point e_1 , on conclura réciproquement :

Si les quatre axes d'un hexaèdre passent par le même point, les trois droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

Pour le parallélépipède, ce plan est le plan infiniment éloigné de l'espace.

Puis on peut établir le théorème :

Soient AA' , BB' , CC' les sommets d'un octaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre points BB' , CC' sont situés dans le même plan (ε_2) et les points AA' , CC' dans le même plan (ε_3), les points AA' , BB' sont aussi situés dans le même plan (ε_4).

En d'autres termes :

Si les huit faces d'un octaèdre passent deux à deux par les arêtes de deux plans quadrilatères, il existe encore un troisième quadrilatère qui a la même propriété.

Le corps réciproque du parallélépipède est un octaèdre dont les axes se divisent entre eux en parties égales.

On établira, par des considérations réciproques aux précédentes, les notions des « plans harmoniques » et de l'« octaèdre complet ».

3^e Dans l'étendue à quatre dimensions, la figure réciproque à l'octaédroïde est l'hexadécaédroïde, limité par seize tétraèdres, dont chaque fois huit ont un sommet commun. Cette figure a huit sommets, vingt-quatre arêtes, trente-deux faces. La projection d'un hexadécaédroïde dans l'espace peut être construite de la manière suivante : On construit un tétraèdre à l'intérieur d'un autre, de façon que les sommets de l'un soient situés vis-à-vis des faces de l'autre, et l'on joint, par droites, chaque sommet de l'extérieur avec les trois sommets de la face opposée de l'intérieur.

En considérant que, dans l'étendue à quatre dimensions, point

et espace, droite et plan sont réciproques entre eux, on peut aisément établir les théorèmes concernant l'hexadécaédroïde.

4° Quant à la figure à n dimensions, il suffit de considérer que le nombre des figures limitantes à k dimensions est égal au nombre des figures limitantes à $n - k - 1$ dimensions de la figure réciproque. Donc, si l'on remplace k par $n - k - 1$ dans l'expression $2^{n-k} n^{(k)}$, on trouve que le nombre des figures limitantes à k dimensions pour une figure de la troisième série est

$$2^{k+1} n^{(n-k-1)} \text{ ou } 2^{k+1} n^{(k+1)};$$

Par conséquent, il y a

$$\begin{aligned} 2n & \text{ sommets,} \\ 4n^{(2)} & \text{ arêtes,} \\ 8n^{(3)} & \text{ faces, etc. } ^{(1)}. \end{aligned}$$

D'après les recherches précédentes, il est possible d'étendre les théorèmes concernant le triangle, quadrilatère, tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, à l'étendue à n dimensions. Mais il n'en est pas de même des autres polygones, ni du dodécaèdre et icosaèdre, dont les figures analogues n'existent pas dans les étendues à plus de trois dimensions, excepté la quatrième dimension où il y a encore trois figures, limitées par vingt-quatre octaèdres, cent vingt dodécaèdres, six cents tétraèdres, dont on ne connaît pas encore les relations avec les figures à deux et trois dimensions.

Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel;

par M. GASCHEAU ⁽²⁾.

(Séance du 16 juin 1882.)

PRÉFACE.

En traitant diverses questions de Mécanique rationnelle, j'ai rencontré plusieurs cas singuliers auxquels il ne m'a pas paru

⁽¹⁾ Pour $k = n - 1$ on obtient 2^n , en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14.)

⁽²⁾ En publiant l'étude de M. Gascheau, la Rédaction déclare qu'elle laisse à l'auteur toute la responsabilité de l'opinion qui y est soutenue, et elle ne ga-

possible d'appliquer le raisonnement mathématique, qui, partant de principes certains et, marchant de conséquence en conséquence, doit conduire à une solution incontestable; ces circonstances exceptionnelles exigent, à mon sens, un mode exceptionnel de raisonnement; celui que j'ai employé consiste dans l'*induction* substituée à la *déduction*. Mais il faut convenir que les solutions obtenues par ce moyen ne sont pas à l'abri de doutes et d'objections. Par ce motif, j'ai fait imprimer mon étude, non pour la publier, mais pour la distribuer aux géomètres dont les noms font aujourd'hui autorité dans la Science, et les assurer que je serais très reconnaissant à ceux qui m'adresseraient leur opinion motivée, fût-elle défavorable.

Plusieurs savants ont bien voulu répondre à mon appel. J'y distingue trois membres de l'Institut, parfaitement compétents, mais dont les trois réponses sont complètement divergentes, savoir : l'un rejette tout à fait ma solution; un autre l'admet d'une manière sommaire, sans donner les motifs de son approbation; et le troisième émet une opinion intermédiaire.

Je viens donc aujourd'hui présenter aux géomètres le calcul et le raisonnement spécial que j'ai appliqués à un problème qui est un cas particulier de l'art. 236 du *Traité de Mécanique* de Poisson (édit. de 1833).

rantit en aucune façon la rigueur de la solution qu'il propose pour un problème paradoxal. M. Gascheau admet l'existence réelle d'une force infinie qui agirait sur un point matériel. Or les forces sont toujours du même ordre de grandeur que les masses auxquelles elles sont appliquées; elles ne peuvent leur communiquer que des accélérations et des vitesses finies. L'auteur étend, par voie d'induction, le principe de l'inertie aux cas où la vitesse devient infinie, tandis que ce principe perd alors toute justesse. Qu'on cherche, par exemple, l'équation du mouvement rectiligne d'un point attiré vers un centre fixe proportionnellement à l'inverse du carré de la distance; on reconnaîtra que, dans ce cas limite, la vitesse du mobile change de signe en passant par l'infini quand il arrive au centre d'attraction, et qu'au lieu de franchir ce centre, le point mobile retourne à son point de départ, comme s'il avait rencontré une bande élastique. Le résultat admis par M. Gascheau pour la traversée du pôle est donc fictif à tous les points de vue, et rien ne prouve que le mobile ne rétrogradera pas, à partir de ce point, sans passer dans la seconde branche de la spirale hyperbolique. On observera également que les propriétés géométriques de cette courbe sont bien connues. Malgré ces objections de fond, l'analyse d'un cas singulier aussi étrange a paru présenter assez d'intérêt pour justifier l'admission du travail de M. Gascheau dans le *Bulletin de la Société mathématique*.

SOLUTION PROPOSÉE.

1. *Équations du mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale, attractive et inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au centre d'action.* — J'adopte les notations de Poisson (p. 446 et suivantes), sauf un changement indiqué ci-dessous dans l'expression de la valeur de la vitesse initiale; alors j'ai, à l'origine du mouvement,

$$(1) \quad t = 0, \quad \theta = 0, \quad r = \gamma, \quad \delta = \alpha, \quad v = \sqrt{2gh} = a.$$

En tenant compte de la relation générale

$$\text{tang } \delta = \frac{r d\theta}{dr},$$

l'équation des aires est ici

$$(2) \quad r^2 d\theta = a\gamma \sin \alpha dt;$$

et celle des forces vives

$$(3) \quad v^2 = \frac{K\gamma^3}{r^2} + a^2 - K\gamma.$$

L'élimination de $d\theta$ entre ces deux équations donne

$$\frac{dr^2}{dt^2} + (\alpha^2 \sin^2 \alpha - K\gamma) \frac{\gamma^2}{r^2} = a^2 - K\gamma.$$

Poisson résout cette équation dans deux cas, attribuant successivement une valeur positive et une valeur négative au coefficient de $\frac{\gamma^2}{r^2}$, sans s'occuper du cas où ce multiplicateur est nul; c'est celui que je traite ici, et, en conséquence, je pose

$$K\gamma = a^2 \sin^2 \alpha.$$

Cette relation, introduite dans l'équation précédente, donne

$$\frac{dr^2}{dt^2} = a^2 \cos^2 \alpha$$

et, par suite,

$$\frac{dr}{dt} = \pm a \cos \alpha;$$

d'où je conclus que la question de Mécanique donne lieu à deux problèmes distincts qui attribuent au rayon vecteur r , l'un une

valeur croissante et l'autre une valeur décroissante, à mesure que le temps s'écoule.

En tenant compte des conditions (1), les intégrales de ces deux équations sont

$$(4) \quad r = \gamma + a \cos z t \quad \text{et} \quad r = \gamma - a \cos z t.$$

Soient O le pôle et C le point de départ du mobile, de sorte que γ représente la distance OC.

Comme toutes les valeurs de la variable indépendante t sont comprises entre zéro et l'infini, sans que cette quantité prenne de valeurs négatives, si la première équation correspond au cas où le mobile est lancé dans la direction CA qui fait un angle aigu avec l'axe polaire, la deuxième s'appliquera au cas où le mobile part dans le sens opposé CA' qui correspond à $z + \pi$.

J'élimine dt entre l'équation des aires (2) et l'équation différentielle ci-dessus, où je prends le signe supérieur, ce qui donne

$$r^2 d\theta = \gamma \tan z dr; \quad \text{d'où} \quad d\theta = \gamma \tan z \frac{dr}{r^2}.$$

En intégrant, on aura, conformément aux conditions initiales,

$$(5) \quad \theta = \tan z \left(1 - \frac{\gamma}{r} \right).$$

Cette équation, dans laquelle la variable t n'entre pas explicitement, convient aux deux cas où l'on aura à employer les équations (4), puisque $\tan z$ ne change pas quand l'angle z augmente de deux droits. On obtient sans difficulté ces deux dernières formules,

$$(6) \quad \tan \varphi = \frac{\gamma \tan z}{r} = \tan z - \theta,$$

$$(7) \quad v^2 = a^2 \left(\cos^2 z + \frac{\gamma^2}{r^2} \sin^2 z \right).$$

2. *Trajectoire.* — Je vais exposer succinctement les propriétés géométriques de la trajectoire du mobile représentée par l'équation (5), que l'on peut écrire sous la forme

$$r = \gamma \frac{\tan z}{\tan z - \theta},$$

où θ sera la variable indépendante.

Asymptote rectiligne. — Soit OP l'abscisse d'un point d'un arc, on aura

$$x = r \cos \theta = \frac{\pi}{2} \gamma \frac{\cos \theta}{\frac{\pi}{2} - \theta} = \frac{\pi}{2} \gamma \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{\frac{\pi}{2} - \theta};$$

valeur qui se réduit à $\frac{\pi}{2} \gamma$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; d'où l'on conclut qu'en prenant $OB = \frac{\pi}{2} \gamma$, et menant BL perpendiculaire à l'axe, cette droite sera asymptote aux deux arcs.

Il résulte de l'équation (6) que la *sous-tangente* d'un point quelconque de la courbe est égale à cette quantité OB et, par conséquent, *constante*; propriété qui sert souvent de définition à la spirale hyperbolique.

Pôle asymptotique. — L'équation (5) étant satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$, j'en conclus que le mobile parcourant l'une des spires en se rapprochant continuellement du pôle ne peut atteindre ce point que par un nombre infini de révolutions de son rayon vecteur.

Nœuds. — Points de croisement des deux spires sur leur axe de symétrie, tels que C, K, Q, . . ., déterminés par les valeurs de θ comprises dans la formule $n\pi$, où n est un nombre entier. L'axe est bissecteur de l'angle des tangentes aux deux spires. L'axe est le rayon vecteur d'un nœud quelconque. Les nœuds sont en nombre infini. Le point C, commun aux deux arcs et aux deux spires, est le premier nœud. Le pôle est la limite des nœuds.

Rectification. — La formule générale $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$, appliquée à la courbe représentée par l'équation (5), donne

$$ds = \frac{dr}{2r} \sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2}$$

et, en intégrant,

$$\int ds = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} + \frac{\pi \gamma}{4} \log \frac{\sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} - \pi \gamma}{\sqrt{4r^2 + \pi^2 \gamma^2} + \pi \gamma} + \text{const.}$$

Pour $r = \infty$, la première partie est infinie; donc chaque arc, CF ou CF', est infini, résultat facile à prévoir. Pour $r = 0$, la

seconde partie est également infinie : donc chaque spire est infinie, ce qui n'était pas évident *a priori*.

Corollaire. — Les formules (5), (6) et (7) donnent, sans difficulté, les conséquences suivantes.

Soient m' et m deux points symétriques de la trajectoire ; les vitesses en ces points sont égales et leurs directions $m't'$ et mt sont également inclinées par rapport à l'axe polaire ; soient n' et n deux autres points symétriques l'un de l'autre : les deux arcs symétriques $m'n'$ et nm seront parcourus en temps égaux.

Remarque. — La figure de la trajectoire, en même temps variée et régulière, ses propriétés géométriques, son rôle dans la question de Mécanique actuelle lui donnent, ce me semble, comme à la cycloïde, assez d'intérêt pour faire regretter que son étude ne tienne pas plus de place dans les Traités de Calcul infinitésimal et de Mécanique rationnelle.

Observations sur les limites et l'étendue de la solution d'un problème. — Il n'y a pas de calcul algébrique, finissant par une équation, qui ne soit la traduction d'une suite de déductions légitimes ; par conséquent, la traduction de cette équation, en langage ordinaire, est généralement une proposition admissible au rang des vérités mathématiques, mais il peut se produire des cas particuliers où un résultat obtenu sorte de la catégorie des quantités ordinaires dont la signification est connue et doit être déterminée. Alors une explication devient nécessaire et, si l'interprétation exigée par la présence d'une valeur singulière *ne présente rien qui soit contraire à la raison, la solution est acceptable*, en vertu du caractère infaillible appartenant au Calcul algébrique : je n'ai pas besoin d'ajouter que cette observation vise le raisonnement spécial annoncé dans la Préface.

Les valeurs critiques dont il s'agit ici sont celles qui introduisent des résultats infinis ou imaginaires ; or un de mes adversaires déclare qu'il n'a pas moins de répugnance pour les uns que pour les autres, et qu'il faut rejeter indistinctement toute solution où ils se présentent. Cependant j'y trouve une différence bien tranchée, et je regarde une *quantité infinie* comme pouvant manifester un changement brusque dans une fonction, mais sans lui

imposer la moindre interruption de réalité, tandis qu'une valeur *imaginaire* de la fonction attribuée à la variable une limite, passé laquelle cette fonction cesse d'exister. Ainsi, par exemple, quand on porte son attention : 1° sur un cercle rapporté à deux diamètres rectangulaires; 2° sur une hyperbole équilatère rapportée à deux axes rectangulaires parallèles à ses asymptotes; l'ordonnée dans chaque cas étant prise pour fonction de l'abscisse, on voit, dans le premier, que, quand la variable a atteint la grandeur du rayon, elle peut continuer à croître jusqu'à l'infini, sans que la fonction prenne jamais une valeur réelle. Il n'en arrive pas autant à l'ordonnée de l'hyperbole; car, tout infinie qu'elle devient pour une valeur *déterminée de l'abscisse*, elle n'en prend pas moins des valeurs réelles et déterminées et pour toutes les valeurs de la variable, fussent-elles aussi rapprochées que l'on voudra de sa valeur critique : seulement celle-ci correspond au changement subit du signe de la fonction. Il n'y aurait eu même aucun changement s'il se fût agi de l'hyperbole représentée par l'équation $x^2y = 1$. De là je conclus qu'en passant par l'infini cette dernière ordonnée *reste continue*, tandis que celle de la première, représentée par $xy = 1$, devient *discontinue*.

4. *Mouvement d'un point qui s'éloigne du pôle.* — Le rapport $\frac{dr}{dt}$, obtenu (n° 1), est positif à l'origine du mouvement, et la vitesse initiale a est dirigée dans le sens CA. C'est donc la première équation (4) qui convient à ce sens, et le mouvement est déterminé par les équations

$$(4) \quad r = \gamma + a \cos \alpha t,$$

$$(5) \quad \theta = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{r} \right),$$

$$(6) \quad \tan \phi = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{r},$$

$$(7) \quad v^2 = a^2 \left(\cos^2 \alpha + \frac{\gamma^2}{r^2} \sin^2 \alpha \right),$$

desquelles on déduit, sans difficulté, les lois suivantes :

1° Le rayon vecteur croît de quantités égales en temps égaux, ou bien, le mouvement du mobile est uniforme suivant le rayon vecteur.

2° La grandeur du rayon vecteur varie depuis γ jusqu'à l'infini, et la durée de cet accroissement est infinie.

3° L'inclinaison du rayon vecteur sur l'axe polaire varie depuis zéro jusqu'à 90° , limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

4° La vitesse propre du mobile décroît depuis a jusqu'à $a \cos z$, limite qu'elle n'atteint qu'après un temps infini.

5° Toute la trajectoire du mobile, dans ce mouvement, se réduit à l'arc illimité CF, asymptotique à la droite BE, dont il peut s'approcher jusqu'à une distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit, mais sans l'atteindre jamais et sans que sa vitesse soit jamais éteinte.

§. *Mouvement d'un point qui s'approche du pôle.* — La vitesse initiale a étant maintenant dirigée dans le sens CA', c'est la seconde équation (4) du n° 1 qui convient à ce cas. Je la transforme en posant

$$\frac{\gamma}{a \cos z} = T,$$

et j'obtiens

$$(4) \quad r = \gamma \left(1 - \frac{t}{T} \right).$$

Les trois autres (5), (6) et (7) du n° 4 ci-dessus complètent la solution qui donne, de la manière suivante, les lois du mouvement :

1° Lorsque le temps atteint la valeur

$$t = T,$$

on trouve, par les équations (4) et (7),

$$r = 0 \quad \text{et} \quad v = \infty;$$

d'où je conclus que, pendant le temps fini T, le mobile a parcouru la spire infinie CH'KL'Q... O (n° 2), et que, par conséquent, ce point est arrivé au pôle O. Mais ce résultat a besoin d'être expliqué conformément à la première observation du n° 3. Pour cela, j'emploie la loi du mouvement rectiligne uniforme, d'après laquelle l'espace parcouru est exprimé par un produit de deux facteurs, qui sont la *vitesse* et le *temps*. Or, pourvu que le premier soit infini, le second restant fini, le produit n'en est pas moins infini ;

et c'est en admettant que cette conséquence peut être attribuée à un mouvement variable quelconque que j'obtiens une interprétation qui me paraît suffisante pour le cas actuel.

2° Je vais encore avoir recours à l'induction pour déterminer la direction suivant laquelle le point matériel atteint et quitte le centre d'action. A cet effet, je remarque d'abord qu'à l'instant où ce mobile passe par le pôle, son rayon vecteur se réduit à un point ; mais la Géométrie ne manque pas d'exemples de cas où une droite, joignant deux points réunis en un seul, n'en a pas moins une direction déterminée. Or ici les deux points dont il s'agit sont le mobile et le pôle que je considère comme la limite des nœuds (n° 2) ; d'ailleurs l'axe polaire est le rayon vecteur d'un nœud quelconque : si donc on admet que cette propriété a lieu jusqu'à la limite, il en résulte que la direction demandée est celle de l'axe polaire. Cela posé, je fais $r = 0$ dans l'équation (6), ce qui donne $\tan \delta = \infty$, par suite $\delta = \frac{\pi}{2}$: donc enfin le mouvement est dirigé suivant OY perpendiculaire à l'axe polaire OX. En outre, on peut s'assurer que cette loi, comme la première, satisfait à l'épreuve du n° 3. En effet, la valeur de la force motrice étant $\frac{K\gamma^3}{r^3}$, cette quantité devient infinie pour $r = 0$, d'où il résulte qu'à l'époque T le point matériel est retenu au pôle, par une résistance infinie ; mais, comme il est animé d'une vitesse infiniment grande, la présence de cet élément de mouvement me paraît suffisante pour autoriser à admettre que la cause contraire est détruite.

3° Je fais $t = 2T$, ce qui donne, d'après les équations (4), (5), (6) et (7),

$$r = -\gamma, \quad \theta = \pi, \quad \tan \delta = -\frac{\pi}{2} = -\tan \alpha, \quad v = a.$$

Ces résultats expriment que, *après un second intervalle fini T, le mobile, partant du point O avec sa vitesse infinie, parcourt la seconde spire infinie O...QLKHC, pour revenir à son point de départ C, où il reprend sa vitesse initiale a dirigée suivant la tangente à l'arc MC.*

4° Le mobile, à son retour en C, se retrouve dans les conditions initiales du numéro précédent, d'après lesquelles il va mettre un

temps infini à parcourir l'arc infini CF' asymptotique à la droite BE'.

5° Dans cette seconde solution, la trajectoire est composée des deux spires réunies à l'arc CF', c'est-à-dire de ce qui reste de la spirale hyperbolique totale, quand on en a retranché l'arc CF, trajectoire de la première solution.

SCOLIE I. — L'équation des aires donne

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\alpha \gamma \sin \alpha}{r^2};$$

au moyen de la formule (7), on peut donner à celle-ci la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\gamma \sin \alpha}{\sqrt{r^2 \cos^2 \alpha + \gamma^2 \sin^2 \alpha}} \frac{v}{r}.$$

Ici le multiplicateur de $\frac{v}{r}$ devient l'unité pour $r = 0$; par conséquent, à cette limite, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r};$$

donc alors, la vitesse propre du mobile étant infinie, la vitesse angulaire de son rayon vecteur devient une grandeur infinie d'un ordre supérieur à v : d'où l'on peut conclure que le mobile atteint le pôle, non en glissant, mais en tournant une infinité de fois autour de ce point fixe.

Ces observations s'accordent avec les remarques d'après lesquelles la spirale, prise depuis le point C jusqu'au pôle, a un développement linéaire infini, tandis qu'elle n'enveloppe qu'une étendue superficielle finie, ce qui est une conséquence de la loi des aires donnée par la Mécanique.

SCOLIE II. — Ma solution, ainsi que lescolie précédent, obtiennent une sanction importante par le n° 236 de la Mécanique de Poisson, qui résout le même problème de Dynamique, dans le cas où la trajectoire, au lieu d'être une spirale hyperbolique, est la spirale représentée par l'équation

$$r = \frac{2\gamma}{e^{n\theta} - e^{-n\theta}} \quad (\text{p. 453}).$$

A la fin de la page précédente, l'auteur dit : « Le mobile décrira

une spirale autour du pôle, et *atteindra* ce point après un nombre infini de révolutions. »

La solution se termine par une équation qu'on peut écrire sous la forme

$$t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}} \frac{1 - e^{-2n\theta}}{1 + e^{-2n\theta}},$$

pour $\theta = \infty$, la valeur de r devient nulle et celle de $t = \frac{\gamma}{n\sqrt{2gh}}$; donc le mobile arrive au pôle, après un temps fini et déterminé pendant lequel il a exécuté une infinité de circonvolutions autour de ce point. Cette dernière propriété est encore conforme au scolie précédent.

Outre ces deux équations déterminant θ et r en fonction de t , il faut en produire une troisième qui donne la valeur de la vitesse v : c'est celle qui résulte immédiatement du principe des forces vives

$$v^2 = 2gh \left[(n^2 + 1) \frac{\theta^2}{r^2} - n^2 \right],$$

et l'on obtient ainsi la solution complète.

Ainsi voilà deux exemples d'un même problème de Dynamique dans lesquels les deux trajectoires sont différentes à cause de la différence des conditions initiales du mouvement, ce qui n'empêche pas l'identité des lois de ce mouvement déduites ou du moins résultant des deux solutions.

SCOLIE III. — Quand on discute, au seul point de vue de la Géométrie, l'équation de la spirale hyperbolique, on exprime sa propriété asymptotique par rapport au pôle, en disant que chaque spire fait une infinité de circonvolutions autour de ce point, sans *jamais* l'atteindre. Mais cet *adverbe de temps* doit être réformé dans le cas où la courbe dont il s'agit devient la trajectoire d'un mobile qui peut exécuter un nombre infini de révolutions pendant un temps fini, car la Mécanique n'est point ainsi en désaccord avec la Géométrie, donnant une équation qui est satisfaite par $r = 0$ et $\theta = \infty$.

J'ai annoncé, dans la Préface, que le résultat de mon étude peut provoquer des doutes et des objections. A ce sujet, il n'est peut-

être pas sans intérêt de montrer comment peut en produire un article susceptible d'être traduit en paradoxe apparent, et de mettre cet article en regard d'un passage de la *Mécanique* de Poisson auquel on peut aussi attribuer un caractère paradoxal.

Dans le n° 5 de mon Mémoire, on trouve que :

« Un mobile met un *temps fini* à parcourir un *chemin infini* » ;
au rebours de ce fait, le Traité de Poisson, p. 294, dit que :

« Un mobile met un *temps infini* à parcourir un *chemin fini*. »
J'établis la première proposition par une induction que je crois être de bon aloi.

Quant à la seconde, Poisson se borne à l'exprimer; mais, s'il avait voulu la démontrer, il se serait aperçu qu'elle n'a pas toute la généralité qu'il lui attribue. Cependant, plus loin (n° 131, p. 339), il prouve que, dans un cas particulier du mouvement d'un point pesant sur la circonférence d'un cercle vertical, le mobile met effectivement un *temps infini* à parcourir l'*arc fini* ABA'E. Pour donner un sens pratique à ce résultat, j'observe que, dans une position prise à volonté, le mobile est à une distance du point culminant E, exprimée par $\sqrt{2az}$. Or on peut donner à z une valeur qui rende cette distance moindre que toute quantité donnée, quelque petite qu'elle soit : donc, si l'on porte cette valeur de z dans la formule qui exprime t en fonction de z , on connaîtra la durée du temps que le mobile emploiera à approcher, autant que l'on voudra, de la fin de son trajet; et l'on obtiendra ainsi une solution approximative, tout aussi valable que celle dont il faut bien se contenter quand on rencontre un nombre incommensurable tel que π , e , ou l'inconnue d'une équation de degré supérieur, etc.

Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques;
par M. SCHOUTE.

(Séance du 17 novembre 1882.)

Dans son excellent Mémoire sur les courbes à centres et leurs propriétés, etc. (*Journal de Crelle*, t. 47, p. 7-105), Steiner a

donné, par rapport aux courbes du troisième ordre, les deux théorèmes suivants :

1° *Le lieu des centres des courbes C^3 à centre qui passent par six points donnés est une courbe du cinquième ordre.*

2° *Par sept points donnés on peut faire passer neuf courbes C^3 à centre.*

On a, en général, dans le cas d'une courbe C^m d'ordre

<i>Pair.</i>	<i>Impair.</i>
1° Le lieu des centres des courbes C^m à centre, qui passent par	1° Le lieu des centres des courbes C^m à centre, qui passent par
$\frac{1}{4} (m+2)^2$	$\frac{1}{4} (m+1)(m+3)$
points donnés, est une courbe de l'ordre	points donnés, est une courbe de l'ordre
$\frac{1}{24} m(m+2)(m+4).$	$\frac{1}{24} (m+1)(m+2)(m+3).$
2° Par	2° Par
$\frac{1}{3} (m+2)^2 + 1$	$\frac{1}{3} (m+1)(m+3) + 1$
points donnés, on ne peut pas faire passer plus de	points donnés, on ne peut pas faire passer plus de
$\frac{1}{576} m(m+4)$ $\times (m^4 + 8m^3 + 2m^2 - 56m + 72)$	$\frac{1}{576} (m+1)(m^2-1)$ $(m^3 + 9m^2 + 14m - 30)$
courbes C^m à centre.	courbes C^m à centre, si $m > 3$. (Pour $m = 3$, on trouve 9 au lieu de 10).

Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité;
par M. SCHLEGEL.

(Séance du 17 novembre 1882.)

On sait que les opérations et notions de l'*Ausdehnungslehre* sont particulièrement propres à démontrer des théorèmes de Mé-

canique (1). C'est ce qui arrive eu égard au théorème susdit (*Bulletin*, t. X, p. 40 et 131). En remarquant: 1° que $(A - B)$ est la partie de la droite comprise entre les points A et B; 2° que la multiplication d'une droite par i^n signifie que la droite tourne de n angles droits (n étant un nombre quelconque réel); 3° que le centre de gravité G_a des n points $A_1, \dots, A_n$ est donné par l'équation

$$n G_a = A_1 + \dots + A_n,$$

on peut démontrer le théorème en question par le calcul suivant sans opérations symboliques, seulement au moyen des quatre règles.

Les équations

$$(1) \quad (A_r - B_r) i^\omega = (A_r - B'_r), \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

disent que les droites $A_r B_r$ deviennent $A_r B'_r$, en tournant de l'angle ω .

Les équations

$$(2) \quad \begin{cases} n.G_a = A_1 + \dots + A_n, \\ n.G_b = B_1 + \dots + B_n, \\ n.G'_b = B'_1 + \dots + B'_n \end{cases}$$

disent que les points G_a, G_b, G'_b sont les centres de gravité des points A_r, B_r, B'_r .

On tire de ces équations

$$\begin{aligned} n(G_a - G_b) &= (A_1 - B_1) + (A_2 - B_2) + \dots + (A_n - B_n), \\ n(G_a - G'_b) &= (A_1 - B'_1) + (A_2 - B'_2) + \dots + (A_n - B'_n). \end{aligned}$$

En multipliant la première équation par i^ω et tenant compte des équations (1), on trouve, après avoir supprimé le facteur n ,

$$(G_a - G_b) i^\omega = (G_a - G'_b),$$

ce qui est le théorème en question.

On voit que, sans rien changer au calcul, les simples points A_r, B_r, B'_r peuvent être remplacés par $m_r A_r, m_r B_r, m_r B'_r$ (m_r signifiant la masse du point).

(1) Voir, par exemple, le Mémoire de Grassmann : *Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre* (*Mathem. Annalen*, t. XII, p. 222).

Quant aux méthodes suivies par MM. Laisant et Laquière, il faut remarquer que la méthode des quaternions, ainsi que celle des équipollences, sont des cas particuliers de l'*Ausdehnungslehre*. [Voir le Mémoire : *Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre* (*Mathem. Annalen*, t. XII, p. 375) et GRASSMANN, *Die Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862, p. VIII]. C'est pourquoi il y a aussi de l'affinité entre les trois démonstrations du théorème de M. Laisant.

Aperçu d'une solution géométrique du problème suivant :
« Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée » ⁽¹⁾; par M. SCHOUTE.

(Séance du 17 novembre 1882.)

Le problème en question se résout sans peine par l'analyse; le lecteur en trouvera sans doute une solution géométrique avec les indications suivantes. Si l'on fait une figure où A représente un point arbitraire de la parabole, B le point d'intersection de la normale en A à la parabole et de sa directrice, C un point de cette normale déterminé au delà de la directrice de manière que $CB = 3BA$:

(a) Les hyperboles équilatères, qui ont au point A un contact du second ordre avec la parabole, passent toutes par le point C;

(b) Le lieu des centres des hyperboles équilatères, qui ont au point A un contact du second ordre avec la parabole, est le cercle, dont B est le centre et BA le rayon;

(c) Le centre de l'hyperbole équilatère, qui a au point A un contact du troisième ordre avec la parabole, est le point symétrique de A par rapport à la directrice;

(¹) Le problème a été posé par M. W. Mantel dans un Recueil hollandais : *Wiskundige opgaven*.

(d) *Le lieu cherché est la parabole symétrique de la parabole donnée par rapport à sa directrice.*

En passant, on trouve ce théorème :

(e) *Les deux paraboles, qui ont en un point donné un contact du troisième ordre avec une hyperbole équilatère donnée, ont la même directrice, la droite élevée perpendiculairement sur le milieu du rayon vecteur du point par rapport au centre de la courbe,*

et la solution géométrique des deux problèmes :

(f) *Construire les deux asymptotes, les sommets et les foyers de l'hyperbole équilatère, qui a un contact du troisième ordre avec une parabole donnée en un point donné.*

(g) *Construire la directrice et les foyers des deux paraboles qui ont un contact du troisième ordre avec une hyperbole équilatère donnée en un point donné.*

Je termine par une remarque. Le théorème fondamental : *Toute hyperbole équilatère qui contient les trois sommets d'un triangle contient aussi le point d'intersection des hauteurs*, théorème dont j'ai fait usage dans la démonstration du lemme (a), permet de remplacer la condition quadruple imposée à l'hyperbole équilatère, d'avoir en A un contact du troisième ordre avec la parabole donnée, par deux conditions doubles, celles de toucher en A la parabole et en C une droite déterminée qu'on construit sans peine.

Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes; par M. H. LEMONNIER⁽¹⁾.

(Séance du 21 juillet 1882.)

1. Étant donnée l'équation

$$(1) \quad f(x, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

où $x_1, \dots, x_n$ désignent n variables indépendantes, et x une fonc-

⁽¹⁾ L'auteur de ce travail vient d'être inopinément enlevé à la Science, à sa

tion de ces variables ayant $p_1, \dots, p_n$ pour dérivées partielles par rapport à elles, nous nous proposons d'en obtenir une intégrale complète.

L'équation

$$(2) \quad F(x, x_1, \dots, x_n) = 0$$

sera une intégrale de (1) lorsque par la substitution de toute valeur de x qui en provient et des dérivées partielles correspondantes, dans cette équation (1), on obtient une identité, sans attribuer de valeurs particulières à $x_1, \dots, x_n$, ni à des constantes arbitraires pouvant figurer dans F , étrangères à f .

Soit posé

$$(3) \quad df = X dx + X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n + P_1 dp_1 + \dots + P_n dp_n.$$

Tant que dans le facteur f on considère $x, p_1, \dots, p_n$ comme dues à l'équation (2), les dérivées partielles de f par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ sont nulles séparément.

On a donc

$$(4) \quad X_i + X_{p_i} + P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = 0,$$

i variant de 1 à n .

En raison des égalités

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial p_n}{\partial x_i} = \frac{\partial p_i}{\partial x_n},$$

c'est avoir

$$(4') \quad X_i + X_{p_i} + P_1 \frac{\partial p_i}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0;$$

mais de

$$dp_i = \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n$$

on tire

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\partial x_i} \left(\partial p_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_1} dx_1 - \dots - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}} dx_{i-1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} dx_{i+1} - \frac{\partial p_i}{\partial x_n} dx_n \right),$$

famille et à ses amis. Le 27 octobre dernier, cet homme de bien, ce savant aussi modeste qu'il était distingué, ce professeur de mérite que tant de travaux désignaient pour une situation plus brillante, est mort à Caen des suites d'une chute qu'il avait faite quelques jours auparavant. La Société mathématique de France perd en lui un membre actif et dévoué, dont le Conseil a plus d'une fois apprécié les lumières; quelques-uns de ses membres regrettent un ami sincère et éclairé. Puisse ce dernier hommage adoucir les regrets d'une famille si éprouvée! H. P.

ce qui, substitué dans (4'), change la relation en

$$(4'') \left\{ \begin{aligned} & (X_i + Xp_i) dx_i + P_i dp_i + (P_1 dx_i - P_i dx_1) \frac{\partial p_i}{\partial x_i} + \dots \\ & + (P_{i-1} dx_i - P_i dx_{i-1}) \frac{\partial p_i}{\partial x_{i-1}} \\ & + (P_{i+1} dx_i - P_i dx_{i+1}) \frac{\partial p_i}{\partial x_{i+1}} + \dots + (P_n dx_i - P_i dx_n) \frac{\partial p_i}{\partial x_n} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si actuellement, au lieu d'estimer indépendantes les unes des autres les valeurs de $x_1, \dots, x_n$, nous les lions par les $n - 1$ relations

$$(5) \quad \frac{dx_i}{P_i} = \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_{i-1}}{P_{i-1}} = \frac{dx_{i+1}}{P_{i+1}} = \dots = \frac{dx_n}{P_n},$$

l'équation (4'') se réduit à

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{-dp_i}{X_i + Xp_i},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_i}{P_i} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_i}{X_i + Xp_i};$$

et cela s'appliquant à toutes les valeurs de i depuis 1 jusqu'à n , il s'ensuit

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + Xp_1} = \frac{-dp_2}{X_2 + Xp_2} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + Xp_n}.$$

En tenant compte de ce que par l'équation (2) l'on a

$$(6) \quad dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n,$$

le système de ces équations est finalement

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} \\ & = \frac{dx}{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + Xp_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + Xp_n}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi, du moment que l'équation (1) est vérifiée par l'équation (2), toute valeur de x tirée de cette équation (2) et les valeurs de p_i correspondantes satisfont au système d'équations différentielles (7), avec des valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui, au lieu de rester

indépendantes, soient liées entre elles par $n - 1$ relations faisant partie de ce système (7).

2. Considérons en lui-même le système (8). L'intégration complète de ce système, soit qu'elle s'étende à toutes valeurs réelles et imaginaires de l'une des variables, soit qu'elle doive se limiter à tels ou tels champs de valeurs, fournira $2n$ équations avec $2n$ constantes arbitraires $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ susceptibles de se déterminer, de façon que pour une valeur attribuée arbitrairement à l'une des variables, à x par exemple, au moins dans un champ de valeurs possibles, on obtienne pour $x, x_2, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ des valeurs pareillement arbitraires $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}$.

Il est à remarquer que les équations (7), en même temps qu'elles impliquent la relation (6), donnent

$$X dx + X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n - P_1 dp_1 + \dots + P_n dp_n = 0,$$

c'est-à-dire $df = 0$, ou $f = \text{const.}$

C'est-à-dire que les valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ en fonction de x , par exemple, substituées dans f , en font une constante.

En égalant le résultat à zéro, on établira une relation entre ces constantes; l'une d'elles s'ensuivra en fonction des autres; leur nombre sera réduit à $n - 1$ et l'équation (1) deviendra l'une des équations intégrales.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffira du reste, dans le cours de l'intégration, de faire de $f = 0$ l'une des équations intégrales; le nombre des constantes arbitraires se trouvera être $n - 1$ dans le système intégral. Mais si, pour $x_1 = x_{10}$, les constantes sont alors $x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}$, ce sera sous la réserve d'avoir $f(x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$.

Dans son beau et renommé Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles, M. Darboux a tiré un heureux parti de l'introduction d'une nouvelle variable t dans le système (7). Suivant son inspiration, prenons pour ce système

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} \\ \quad = \frac{dx}{P_1 P_1 + \dots + P_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X P_1} = \dots = \frac{-dp_n}{X_n + X P_n} = \frac{dt}{T}. \end{cases}$$

Les valeurs des ϖ_i qui se présentent d'abord en fonction de t , $x_1, \dots, x_n$ et des constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, peuvent, en égard aux équations (8), se concevoir exprimées en fonction de t et des $2n$ constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$. Si alors les binômes $p_i - \varpi_i$ sont nuls identiquement, on voit que, $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ l'étant aussi, la variable t ne figurera pas explicitement dans l'équation (9).

Désignons par α l'une quelconque des $2n$ constantes dans le système intégral (8). Si on lui attribue une variation $\delta \alpha$, ces équations donneront

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \delta x_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha, \quad \dots, \quad \delta x_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

et par l'équation (9) on aura

$$(12) \quad \delta x = \varpi_1 \delta x_1 + \dots + \varpi_n \delta x_n + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta \alpha.$$

Mais, quand α sera l'une des constantes éliminées, ou une constante que l'élimination fait disparaître sans qu'on vise à l'éliminer, cette relation (12) se réduit à

$$(13) \quad \delta x = \varpi_1 \delta x_1 + \dots + \varpi_n \delta x_n.$$

Comme l'on a

$$p_1 \delta x_1 + p_2 \delta x_2 + \dots + p_n \delta x_n = p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \delta \alpha + \dots + p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} \delta \alpha,$$

on voit, par l'équation (12), que l'on a

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\varpi_1 - p_1) \delta x_1 + \dots + (\varpi_n - p_n) \delta x_n \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \delta \alpha = \delta x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - p_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} \right). \end{array} \right.$$

Quand α est une constante qui ne subsiste pas dans l'équation (9), si les $\varpi_i - p_i$ sont nuls identiquement, il en sera de même de la fonction

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha} = \frac{\partial x}{\partial \alpha} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial \alpha}.$$

Alors que les $p_i - \varpi_i$ seront tous nuls, mais que α figurera dans la fonction Φ , la dérivée partielle $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$, n'étant pas nulle identiquement, la fonction u_α ne sera pas nulle non plus identiquement.

Ces faits constatés, supposons que, pour chacune des n constantes éliminées, le déterminant Δ n'étant pas nul identiquement, on ait

$$u_\alpha = 0,$$

sans détermination de t , ni des constantes ; alors on a pour ces n constantes les n relations

$$(15) \quad (\varpi_1 - p_1) \frac{\partial x_1}{\partial z_i} + (\varpi_2 - p_2) \frac{\partial x_2}{\partial z_i} + \dots + (\varpi_n - p_n) \frac{\partial x_n}{\partial z_i} = 0,$$

i étant susceptible des valeurs $n+1, \dots, 2n$: ce qui, Δ étant différent de 0, exige que l'on ait

$$\varpi_i - p_i = 0,$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Mais si les p_i sont de même valeur que les ϖ_i quand leurs expressions se prennent en fonction de t et des $2n$ constantes, il est à observer que si, de part et d'autre, on remplace les constantes éliminées $z_{n+1}, \dots, z_{2n}$ par leurs valeurs en $x_1, x_2, \dots, x_n$, l'identité de valeurs subsistera. Par là $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$ recouvreront leurs valeurs telles que les donne l'équation (9), valeurs qui, d'après la relation (11), ne dépendront que de $x_1, x_2, \dots, x_n$ sans que t y figure.

Or l'équation (1), faisant partie du système intégral ou s'y trouvant impliquée, devient identique quand on y substitue les valeurs (9) de $x, x_1, \dots, p_n$, quelles que soient les valeurs attribuées à t et aux $2n$ constantes. Si l'on y substitue la valeur (9) de x et celles de $p_1, p_2, \dots, p_n$ qui sont celles de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_n$, toutes fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et des constantes $z_1, z_2, \dots, z_n$ sans que t y figure, elle se trouvera satisfaite, identiquement, sans détermination aucune, ni des constantes subsistantes, ni des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, car à la place de l'indétermination des constantes $z_{n+1}, \dots, z_{2n}$ se trouvera là celle des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, puisque, par le fait seul que Δ est différent de zéro, l'ensemble des valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme indéterminées est équivalent à celui des constantes $z_{n+1}, \dots, z_{2n}$.

Il est donc ainsi établi que l'équation (9), si u_α est nul identiquement pour chacune des n constantes dont l'élimination conduit à l'équation (9), sans que Δ le soit, constituée, ne contenant pas t explicitement, une équation intégrale de l'équation (1).

De plus, toute constante du système intégral (8) pour laquelle u_x est différent de zéro subsiste dans l'équation (9), de sorte que c'est une intégrale complète quand les n constantes non visées dans l'élimination donnent lieu à des valeurs de u_x qui ne sont pas nulles.

Dans tous les cas où l'équation (9) est une intégrale de l'équation (1), les constantes qui y subsistent sont celles pour lesquelles l'expression u_x est différente de zéro.

Comme fonction de t , u_x est susceptible d'une expression remarquable que donne immédiatement la recherche de sa dérivée.

Observons que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} - p_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \dots - p_n \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx_n}{dt} - \frac{dp_1}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial x} - \dots - \frac{dp_n}{dt} \frac{\partial x_n}{\partial x}, \\ \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial \frac{P_1 p_1 + \dots + P_n p_n}{T}}{\partial x} - p_1 \frac{\partial \frac{P_1}{T}}{\partial x} - \dots - p_n \frac{\partial \frac{P_n}{T}}{\partial x} \\ &\quad + \frac{X_1 + X p_1}{T} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + \frac{X_n + X p_n}{T} \frac{\partial x_n}{\partial x} \\ &= \frac{1}{T} \left(P_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \dots + P_n \frac{\partial p_n}{\partial x} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{X}{T} \left(p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

ce qui, à cause de

$$X \frac{\partial x}{\partial x} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + \dots + X_n \frac{\partial x_n}{\partial x} + p_1 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \dots + p_n \frac{\partial p_n}{\partial x} = 0,$$

relation qui vient de ce que, quelle que soit la constante x , l'équation $f=0$ est impliquée dans le système intégral (9), peut se changer en

$$\frac{du_x}{dt} = - \frac{X}{T} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - p_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x} \right) = - \frac{X}{T} u_x,$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{u_x} &= - \frac{X}{T} dt, \\ u_x &= u_{x_0} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt} \end{aligned}$$

u_{x_0} désignant ce que devient u_x pour $t = t_0$.

Il ressort de cette expression, que si, pour $t = t_0$, on a $\frac{N}{T}$ d'une valeur finie, tant que, t variant, cela continuera d'avoir lieu, la valeur de u_x ne sera pas nulle, si u_{x_0} est différent de zéro, mais qu'elle ne cessera pas d'être nulle si u_{x_0} se trouve nul.

Cette propriété est utile pour reconnaître ce qu'il en est de u_x lorsque son expression se simplifie pour une valeur particulière de t , et surtout dans le cas où les constantes sont les valeurs de $x, x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ répondant à une valeur particulière de t , eu égard à ce qu'on ait $f = 0$.

Si, pour $t = t_0$, les variables deviennent $x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}$, l'expression de $u_{p_{i0}}$ sera nulle, en ce que $\frac{\partial x_0}{\partial p_{i0}}, \frac{\partial x_{10}}{\partial p_{i0}}, \dots, \frac{\partial x_{n0}}{\partial p_{i0}}$, se trouvent nuls. Il suffira en conséquence que les p_{i0} soient indépendants les uns des autres et que le Δ correspondant à l'ensemble des p_{i0} ne soit pas nul identiquement, pour que, par l'élimination des p_{i0} on ait une équation intégrale; cette intégrale, d'ailleurs, sera complète si les $u_{x_{i0}}$ sont tous différents de zéro : c'est le procédé connu de Jacobi.

Les constantes étant les mêmes, si l'on pose avec Cauchy $x_0 = \lambda(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, λ indiquant une fonction arbitraire, et qu'on fasse disparaître x_0 par la substitution de λ , il s'ensuivra

$$u_{x_{i0}} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}} - p_{i0},$$

vu que

$$\frac{\partial x_{j0}}{\partial x_{i0}} = 0 \quad (j \neq i).$$

Cette valeur de $u_{x_{i0}}$ sera nulle, si p_{i0} se prend égal à $\frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$. Done, si toutes les constantes $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ figurent dans la fonction λ et qu'à chacune il corresponde une dérivée partielle de valeur finie, on aura par la détermination des p_{i0} dont on vient de parler des u_x de valeur nulle. Quant au déterminant Δ , il se trouve égal pour $t = t_0$ à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

qu'il varie avec t d'une manière continue, $\frac{X}{T}$ étant par ailleurs d'une valeur finie, on voit que l'élimination de $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ mènera à une intégrale de l'équation (1). Il ne s'y trouvera aucune des constantes arbitraires primitives. Mais, si l'on fait dépendre λ de n constantes $A_1, A_2, \dots, A_n$ telles qu'à leur égard les u_λ soient différents de zéro, on obtiendra une intégrale complète. Notamment, si l'on pose $x_0 = A_1 x_{10} + A_2 x_{20} + \dots + A_n x_{n0}$, il est à observer qu'il s'ensuivra, après le remplacement de x_0 et des $p_{i0} = A_i$,

$$v_{A_i} = u_{x_0} \frac{\partial x_0}{\partial A_i} = x_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt},$$

car $u_{x_0} = 1$, pour $t = t_0$, d'où une intégrale complète où les constantes seront $A_1, A_2, \dots, A_n$.

On pourra encore prendre $x_0 = \lambda(x_{10}, \dots, x_{k0})$ avec $p_{i0} = \frac{\partial \lambda}{\partial x_{i0}}$ pour $i = 1, \dots, k$; on aura $u_\alpha = 0$ pour $\alpha = x_{10}, x_{20}, \dots, x_{k0}; p_{k+1,0}, \dots, p_{n0}$. L'élimination de ces constantes conduira à une intégrale qui dépendra de constantes introduites dans λ , si les u_α à leur égard ne sont pas de valeur nulle.

4. Je ne m'arrête pas sur des cas particuliers, comme celui où l'équation (1) est linéaire, ni celui où elle est homogène par rapport aux p_i , ni sur le cas de deux variables indépendantes.

Dans l'intégration du système (7), il se peut qu'il soit avantageux, pour les calculs, d'introduire d'autres constantes que les x_{i0} et p_{i0} . Revenons donc aux équations (8) où les constantes sont désignées par $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$.

Quand les u_α se trouvaient nuls pour n de ces constantes, et différents de zéro pour les n autres, nous avons reconnu que l'élimination des premières pour les $n+1$ équations donnant $x, x_1, \dots, x_n$, en fonction de t et des constantes, menait à une intégrale complète.

Dans les cas où il y a plus de n constantes pour lesquelles l'expression de u_α est nulle, sans qu'il en soit ainsi pour toutes, il est aisé d'opérer sur les constantes un changement qui fait rentrer dans le cas précédent.

Supposons qu'on ait

$$u_{\alpha_1} = 0, \quad u_{\alpha_2} = 0, \quad \dots, \quad u_{\alpha_k} = 0, \quad u_{\alpha_{k+1}} = 0.$$

Si l'on fait

$$x_{k+1} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_k x_k + A_{k+1},$$

il s'ensuivra, après substitution de cette valeur,

$$v_{a_1} = u_{a_1} + u_{a_{k+1}} A = u_{a_{k+1}} A_1 \neq 0$$

$$v_{a_2} = u_{a_{k+1}} A_2 \neq 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$v_k = u_{a_{k+1}} A_k \neq 0,$$

et

$$v_{A_i} = u_{a_{k+1}} x_i = 0.$$

On voit que de cette façon on obtient à la place des u_x nuls autant de v_x correspondants qui ne le sont plus, se rapportant aux mêmes constantes. Quant à la constante pour laquelle u_x n'est pas nul, elle disparaît, mais peut se considérer comme remplacée par A_{k+1} ou l'un des coefficients A_i , en lui laissant une valeur indéterminée, les autres pouvant recevoir à volonté des valeurs numériques différentes de zéro.

Par ce moyen, on pourra réduire à n , s'il est supérieur, le nombre des constantes donnant des u_x nuls, pourvu qu'il s'en trouve un qui soit différent de zéro, ce qui permettra d'obtenir une intégrale complète.

S'il arrive que les valeurs de u_x répondant à deux constantes α_1, α_2 soient différentes de zéro, mais dans un rapport k indépendant de t et de ces constantes, de sorte que $u_{\alpha_2} = k u_{\alpha_1}$, il suffira de faire $\alpha_1 = -k \alpha_2 + A_1$ pour qu'il s'ensuive $v_{\alpha_2} = u_{\alpha_2} - k u_{\alpha_1} = 0$, et d'autre part $v_{A_1} = u_{\alpha_1} \neq 0$; de sorte que, à la place de α_1 se trouvera A_1 donnant pareillement un u_x différent de zéro, tandis que u_{α_2} sera remplacé par v_{α_2} égal à zéro.

Il se peut qu'en opérant ainsi une ou plusieurs fois on amène n constantes à présenter des u_x nuls, au lieu d'en avoir un moindre nombre.

A défaut de pareilles circonstances, s'il se trouve que le nombre des u_x nuls n'atteigne pas n , une ressource toujours possible sera de passer des constantes α à d'autres qui soient pour $t = t_0$ les valeurs $x_0, x_{i0}, \dots, p_{i0}$ pour agir ensuite de l'une des façons indiquées.

§. Quand le système (7) s'intègre sans y introduire une nou-

velle variable t , qu'on y prend x_1 , par exemple, pour variable indépendante, les constantes ne sont plus qu'au nombre de $2n - 1$, $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ susceptibles de se changer, pour $x = x_{10}$, en valeurs correspondantes $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$; $p_{10}, \dots, p_{n0}$ qui, de fait, se réduisent à $2n - 1$ à cause de la condition

$$f(x_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0.$$

x_{10} , comme t_0 , pouvant d'ailleurs être fixé numériquement, ou laissé indéterminé.

L'analyse précédente s'appliquera à ces circonstances, t n'étant qu'à remplacer par x_1 , T par P_1 . On aura alors

$$u_a = \frac{\partial x}{\partial z} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial z},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_{n+1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_{2n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{2n-1}} \end{vmatrix},$$

puis

$$u_a = u_a e^{-\int \frac{\Delta}{P_1} dx_1}$$

Toutefois l'équation (9), indépendante de Δ quand les $p_i = \pi_i$ sont nuls, ne sera pas indépendante forcément de x_1 .

II.

1. Comme problème inverse de celui dont nous venons de nous occuper, se présente la question d'obtenir au moyen d'une intégrale complète de l'équation (1) un système intégral correspondant des équations (7).

La solution est immédiate lorsque l'intégrale complète connue est sous la forme

$$F(x, x_1, x_2, \dots, x_n; x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0,$$

les $x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}$ étant tous des indéterminées.

En effet, si le système intégral se suppose sous une forme analogue, soit que la variable indépendante s'y trouve x_k ou y soit t , la condition d'avoir $f(x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$ étant remplie, les

équations qui le composeront, comme toutes celles qu'on en déduirait, seront telles qu'elles subsisteront, quand un échange s'y opérera entre t ,

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n \quad \text{et} \quad t_0, x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}; p_{10}, \dots, p_{n0}.$$

Soit

$$F(x, x_1, \dots, x_n; x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0$$

l'intégrale complète.

Elle donnera les n équations

$$(17) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

qui feront partie du système intégral. Dès lors il y aura comme correspondantes les n équations

$$(18) \quad \frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0,$$

où les p_{i0} constitueront $n - 1$ constantes arbitraires, l'une d'elles se déterminant par l'équation

$$f(x_0, x_{10}, \dots, x_{n0}, p_{10}, \dots, p_{n0}) = 0.$$

Il y a bien lieu d'observer que par $F = 0$ et les n équations (17) on peut obtenir l'équation (1), et par $F = 0$ avec les équations (18) obtenir $f(x_0, x_{10}, \dots, p_{n0}) = 0$. Il n'y aura de fait qu'un système de $2n$ équations distinctes comprenant ou impliquant $f = 0$, qui constituera un système intégral avec $2n - 1$ constantes arbitraires des équations (7), correspondant bien à l'intégrale complète connue.

Considérons ces équations sous la forme

$$(19) \quad F = 0, \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{p_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{p_n},$$

$$(20) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{p_{10}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{p_{20}} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{p_{n0}},$$

et soit, en supposant x_1 la variable indépendante,

$$u_i = \frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

d'où résulte

$$p_{10} + u_{10} = 0,$$

et de là

$$u_1 = -p_{10}M.$$

Par conséquent

$$(20') \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

pour les équations (20) sous une autre forme.

2. Au reste, du moment que l'équation

$$F(x, x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

est une équation intégrale de l'équation (1) déduite du système des équations (7), elle devient identique quand on y porte à la place de $x_1, x_2, \dots, x_n$ leurs valeurs en fonction de x , et des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n-1}$, de sorte que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial z} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

ce qui, avec les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

donne

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial z} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial z} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

ou

$$(21) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{u_\alpha}.$$

Pour les constantes $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$, cette relation se traduit en

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}.$$

Comme l'on a également

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

par conséquent

$$\frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial x_1} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,$$

ou

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}},$$

on voit que

$$(22) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n},$$

ce qui, rapproché des formules (20'), accuse la formule

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{u_{x_1}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_{x_{10}}}.$$

Pour le problème posé, le cas général, celui où dans l'intégrale complète les n constantes sont autres que celles dont il vient d'être question, demande à être traité par des considérations différentes.

3. Soit

$$(2) \quad F(x, x_1, \dots, x_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

une intégrale complète de l'équation (1).

Prenons-la sous la forme

$$(2') \quad x = \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

L'équation (1) peut se supposer résolue par rapport à l'une des dérivées partielles p_i . Soit ainsi

$$(1') \quad p_1 = \psi(x, x_1, \dots, x_n, p_2, \dots, p_n).$$

Considérons avec l'équation (2)' les n équations

$$(23) \quad p_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i},$$

et posons, d'autre part,

$$(24) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = \psi_i.$$

les lettres β_i désignant n quantités que la suite déterminera.

Nous avons là $2n + 2$ équations, qui au fond ne reviennent qu'à $2n + 1$ équations distinctes, l'équation (1) résultant des équations (23) et de (2). Si les β_i deviennent des fonctions d'une variable t , elles détermineront $x, x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$ également en fonction de t .

Le signe de différentiation d se rapportant à t , le signe ∂ se rapportera, peu importe de quelle façon, aux constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Nous aurons

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n = \psi dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n,$$

puis

$$\begin{aligned} \partial dx &= dx_1 \partial \psi + dx_2 \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ &\quad + \psi \partial dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \partial dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \partial dx_n \\ &= dx_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \partial x + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \partial x_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \partial p_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \partial p_n \right) \\ &\quad + dx_2 \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \\ &\quad + \psi \partial dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \partial dx_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \partial dx_n \end{aligned}$$

ce qui devient, en y portant

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \partial \alpha_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_n} \partial \alpha_n, \\ (25) \left\{ \begin{aligned} \partial dx &= dx_1 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \partial x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \partial x_n \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \partial \alpha_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_n} \partial \alpha_n + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \partial x_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \partial x_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \partial x_n + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \partial p_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial p_n} \partial p_n \right) \\ &\quad + dx_2 \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + dx_n \partial \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} + \psi \partial dx_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \partial dx_2 + \dots \\ &\quad + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \partial dx_n. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(26) \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n - \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots - \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n, \\ d \delta x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} d \delta x_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} d \delta x_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} d \delta x_n + d \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \delta x_1 + \dots \\ &\quad + d \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \delta x_n + \delta x_1 dp_1 + \delta x_2 dp_2 + \dots + \delta x_n dp_n. \end{aligned} \right.$$

En observant que $\delta dx = d \delta x$, que

$$\psi \delta dx_1 = p_1 \delta dx_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} d \delta x_1,$$

que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \delta dx_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} d \delta x_2, \dots,$$

on déduit de là

$$(27) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \left(p_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 - dp_1 \right) \delta x_1 \\ &\quad + \left(p_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_1 - dp_2 \right) \delta x_2 + \dots \\ &\quad + \left(p_n \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_1 - dp_n \right) \delta x_n \\ &\quad + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_2} dx_1 + dx_2 \right) \delta p_2 + \dots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} dx_1 + dx_n \right) \delta p_n \\ &\quad + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 - d \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) \delta x_1 + \dots + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_1 - d \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right) \delta x_n. \end{aligned} \right.$$

Déterminons les $\beta_i = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$ par les n équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \beta_i dx_1 + d\beta_i = 0;$$

il s'ensuivra

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\beta_i}{\beta_i} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} dx_1, \\ \beta_i &= \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} dt}, \end{aligned} \right.$$

ce qui introduit n constantes arbitraires $\beta_{10}, \dots, \beta_{n0}$.

Or le signe δ est applicable à ces nouvelles constantes aussi bien qu'aux x ; les valeurs de $x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ dépendent des unes comme des autres; en conséquence, pourvu que, pour

$t = t_0$ les $2n$ constantes soient telles que $x_1, x_2, x_n, \dots; p_1, \dots, p_n$ puissent recevoir des valeurs quelconques, x ayant d'ailleurs une valeur correspondante fixée par l'équation (2); les variations $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n, \delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_n$ peuvent s'estimer arbitraires, ces variations répondant aux variations des $2n$ constantes.

L'équation ci-dessus a donc lieu quelles que soient ces variations; il en résulte donc

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{-1} &= \frac{dx_2}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}} = \dots = \frac{dx_n}{\frac{\partial \psi}{\partial p_n}} \\ &= \frac{-dp_1}{\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}} = \dots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial \psi}{\partial x}} \\ &= \frac{dx}{-p_1 + p_2 \frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_n}}. \end{aligned} \right.$$

4. En revenant des équations $x = \Psi$, $p_1 = p$ aux équations (1) et (2) $F = 0, f = 0$, on aura

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad \text{déterminé par} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_i} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i} = \beta_i \quad \text{par} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_i} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0,$$

de sorte que, les équations de départ étant

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} F(x, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \quad f(x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} p_i &= 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} \beta_i = 0, \end{aligned} \right.$$

et les β_i ayant leurs valeurs données par

$$\beta_i = \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x_1}{\partial t} dt} = \beta_{i0} e^{-\int_{t_0}^t \left(\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial p_1} \right) dt} = \beta_{i0} e^{\int_{t_0}^t \frac{x}{F_1} dx_1},$$

on en conclut

$$(7) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{P_1} &= \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dx}{P_1 P_1 + \dots + P_n P_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + X P_1} = \dots \\ &= \frac{-dp_n}{X_n + X P_n} = \frac{dt}{T}, \end{aligned} \right.$$

T s'y trouvant à prendre à volonté.

Le système d'équations différentielles a d'après cela pour système intégral avec $2n$ constantes arbitraires, l'équation (1) s'y trouvant impliquée, les équations précédentes (30).

Lorsque f ne contient pas x , on a $X = 0$; les valeurs des β_i deviennent les β_{i0} , elles sont constantes; c'est le théorème que Jacobi a démontré directement, et auquel il a habilement ramené le cas général.

Observons que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt}.$$

En conséquence,

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}, \\ k_1 &= k_2 = \dots = k_n, \end{aligned} \right.$$

les rapports entre les quantités constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ constituent $n - 1$ constantes arbitraires, et, si k_1 se prend pour valeur de β_{10} , on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt}.$$

à prendre $T = X$: on a par là

$$(32) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt},$$

pour la $(2n + 1)^{\text{ième}}$ équation du système intégral, les autres étant $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x} p_i = 0$, et les équations (31).

Lorsque T se prendra autrement, les $2n$ équations, où de fait t ne figure pas servant à déterminer $2n$ des variables $x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n$ en fonction de l'une d'elles, il y aura entre celle-ci et

l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -k_1 \frac{\partial F}{\partial x} e^{-\int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt},$$

ou

$$L \frac{\partial F}{\partial x_1} = L(-k_1) + L \frac{\partial F}{\partial x} - \int_{t_0}^t \frac{X}{T} dt,$$

ou

$$\frac{d \frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \frac{d \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x}} + \frac{X dt}{T} = 0,$$

équation du premier ordre.

§. Si le système (7) est considéré sans la variable auxiliaire t , les intégrales seront

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

et

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{k_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{k_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{k_n},$$

équations dont le nombre est $2n$, avec $2n - 1$ constantes arbitraires qui sont $x_1, x_2, \dots, x_n$ et les rapports entre $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Nous terminerons en signalant l'accord que présentent ces résultats généraux, et ce qui regarde la forme d'intégrale complète examinée d'abord.

Supposons que x_1 soit prise pour variable indépendante à l'égard du système intégral, que $x_0, x_{20}, \dots, x_{n0}$ soient les constantes arbitraires dans l'intégrale complète.

L'équation $\frac{\partial F}{\partial x_i} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0$ devient alors $\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + \beta_i \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, et l'on a

$$(22) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{-1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_0}}{u_0} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{10}}}{u_1} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{20}}}{u_2} = \dots = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_{n0}}}{u_n}$$

u_i étant

$$\frac{\partial x}{\partial x_{i0}} - p_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_{i0}} - p_3 \frac{\partial x_3}{\partial x_{i0}} - \dots - p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_{i0}};$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \frac{\mathfrak{P}_i}{u_0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0.$$

Or $u_0 = M$ et $\mathfrak{P}_i = M \mathfrak{P}_{i0}$. Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} - \mathfrak{P}_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0;$$

c'est avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x_{i0}} + p_{i0} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$$

en prenant $\mathfrak{P}_{i0} = -p_{i0}$.

Ajoutons que, dans le système intégral que nous venons de déduire de l'équation $F = 0$, celle-ci peut se remplacer par l'équation $f = 0$. Mais les équations (7) ne se forment que pour l'équation $f = 0$, et restent les mêmes quand à sa place on prend $f = \Lambda$, Λ étant une constante arbitraire. Donc il suffira de remplacer l'équation $F = 0$ par $f = \Lambda$, les autres équations restant les mêmes pour avoir le système intégral général de ces équations (7).

Il importe peut-être d'appuyer de quelques exemples l'exposé qui précède. Les trois qui suivent suffiront, je l'espère, pour confirmer les principales observations que nous avons eu à faire.

1.

1. Soit $f = pq, y - pz + aq = 0$. De là

$$\begin{aligned} \frac{dx}{q, y - z} &= \frac{dy}{p, y - a} = \frac{dz}{2p, q, y - p, z - q, a} = \frac{-dp}{-p^2} = \frac{-dq}{0}, \\ q &= x, \quad \frac{-p, dx}{a, x} = \frac{dy}{p, y - a} = \frac{dz}{p, x, y} = \frac{dp}{p^2}, \\ \frac{dx}{a, x} &= -\frac{dp}{p^3}, \quad dy - y \frac{dp}{p} - a \frac{dp}{p^2} = 0, \\ x - \frac{a}{p} &= \frac{a, x}{2p^2}, \quad y = p, y - \frac{a}{2p}, \quad z = x, y + \frac{a, x}{p}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{a, x}{2(x - \frac{a}{p})}}, \quad q = x, \quad y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a, x}{2(x - \frac{a}{p})}} - \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2(x - \frac{a}{p})}{a, x}}, \\ z &= x, y + \sqrt{2a, x(x - \frac{a}{p})}. \end{aligned}$$

D'où

$$u_{\gamma} = \frac{\partial z}{\partial \gamma} - q \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} = z \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} - z \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad u_{\alpha} \neq 0, \quad u_{\beta} \neq 0;$$

γ est à éliminer. De là

$$(z - \alpha\gamma)^2 = 2\alpha z(x - \beta).$$

2. Pour le problème inverse,

$$F = (x - \alpha\gamma)^2 - 2\alpha z(x - \beta) = 0,$$

$$f = pq\gamma - p\beta + aq = 0;$$

d'où

$$p(z - \alpha\gamma) - \alpha z = 0, \quad \frac{-\gamma(z - \alpha\gamma) - a(x - \beta)}{k} = \frac{\alpha z}{k'},$$

$$(z - \alpha\gamma)(q - \alpha) = 0,$$

ce qui donne

$$q = \alpha, \quad z = \alpha\gamma + \frac{\alpha z}{p}, \quad \gamma \frac{z}{p} + x - \beta - \alpha\gamma = 0.$$

Par F F ou a

$$z - \alpha\gamma = \sqrt{2\alpha z(x - \beta)},$$

donc

$$p = \sqrt{\frac{\alpha z}{2(x - \beta)}}, \quad \gamma = -\sqrt{\frac{\alpha(x - \beta)}{2z}} + \gamma \sqrt{\frac{\alpha z}{2(x - \beta)}};$$

ce sont bien les intégrales précédentes.

II.

1.

$$2z - px + q\gamma + q^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{-x} = \frac{d\gamma}{\gamma + 2q} = \frac{dz}{-px + q\gamma + 2q^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{3q},$$

$$p = \alpha x, \quad q = \beta x^3, \quad d\gamma + \gamma \frac{dx}{x} + 2\beta x^2 dx = 0,$$

$$\gamma = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{p\gamma}{2} - \frac{q\gamma}{2} - \frac{q^2}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

$$u_{\alpha} = \frac{x^2}{2}, \quad u_{\beta} = -\frac{\gamma}{2} x^2, \quad u_{\gamma} = -\frac{3}{2} \beta x^2.$$

Il n'y a aucune de ces constantes à éliminer.

Si, pour $x = x_0$, on fait

$$\gamma = \gamma_0, \quad z = z_0, \quad p = p_0,$$

sauf à avoir

$$p_0 = \frac{2z_0 + q_0\gamma_0 + q_0^2}{x_0},$$

on trouve

$$\alpha = \frac{2z_0 + q_0\gamma_0 + q_0^2}{x_0^2}, \quad \beta = \frac{q_0}{x_0^3}, \quad \gamma = x_0\gamma_0 + \frac{q_0x_0}{2},$$

$$\alpha - \beta\gamma = \frac{4z_0 + q_0^2}{2x_0^2}.$$

De là

$$q_0 = \frac{2(xy - x_0\gamma_0)x_0^3}{x_0^4 - x^4},$$

et finalement

$$(zx_0^2 - z_0x^2)(x_0^4 - x^4) = x^2x_0^2(xy - x_0\gamma_0)^2.$$

Il est plus simple d'opérer autrement. Observons que l'on a

$$u_\beta + \gamma u_\alpha = 0,$$

de sorte que, si l'on pose

$$\alpha = \gamma\beta + \Lambda,$$

il s'ensuit

$$v_\beta = u_\beta + u_\alpha \gamma = 0.$$

Substitution faite de α , il y a donc β à éliminer.

Cela donne

$$\gamma = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \frac{\Lambda x^2}{2} - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

puis

$$\left(z - \frac{\Lambda x^2}{2}\right) + \left(\gamma - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0, \quad z = \frac{\Lambda x^2}{2} - \left(\gamma - \frac{\gamma}{x}\right)^2.$$

De même, comme l'on a

$$u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

en faisant

$$x = 3\beta\gamma + \Lambda,$$

d'où

$$v_\gamma = u_\gamma + 3\beta u_\alpha = 0,$$

et en éliminant γ de

$$\gamma = \frac{\gamma}{x} - \frac{\beta x^3}{2}, \quad z = \beta\gamma x^2 + \frac{\Lambda}{2} x^2 - \frac{\beta^2}{4} x^6,$$

on obtient pour intégrale

$$z = \beta x^3 y + \frac{\beta^2}{4} x^6 + \frac{\Lambda}{2} x^2.$$

2. *Pour le problème inverse.* — Soit

$$F = z - \frac{\Lambda x^2}{2} + \left(y - \frac{\gamma}{x}\right)^2 = 0;$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} p - \Lambda x + \frac{2\gamma}{x^2} \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) &= 0, & q + 2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) &= 0, \\ 2z - px + qy + q^2 &= 0, \\ \frac{x^2}{2} - 2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) \frac{1}{x} &= \frac{K}{K'}; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= \frac{\gamma}{x} + Bx^3, \\ q &= -2 \left(y - \frac{\gamma}{x}\right) = -2Bx^3, \\ p &= (\Lambda - 2B\gamma)x, \\ z &= \frac{px}{2} - \frac{qy + q^2}{2} = \Lambda x^2 - Bx^6. \end{aligned} \quad \text{C. Q. F. T.}$$

III.

$$f = pq - px - qy - z = 0,$$

$$\frac{dx}{q - x} = \frac{dy}{p - y} = \frac{dz}{2pq - px - qy} = \frac{-dp}{-2p} = \frac{-dq}{-2q} = \frac{dz}{pq - z},$$

d'où

$$q = \alpha_1 p, \quad \frac{dz}{\alpha_1 p^2 + z} = \frac{dp}{2p}, \quad dz - z \frac{dp}{2p} - \frac{\alpha_1 p}{2} dp = 0,$$

$$dx + x \frac{dq}{2q} - \frac{dq}{2} = 0, \quad z = \alpha_2 \sqrt{p} + \frac{\alpha_1 p}{3},$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\alpha_3 + \frac{1}{3} q^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1 p}} + \frac{\alpha_1 p}{3},$$

puis

$$v = \frac{pq - px - z}{q} = \frac{p}{3} - \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1} p} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \sqrt{p}}$$

calculons

$$u_{\alpha} = \frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3}.$$

D'abord

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_3} &= \left(\frac{\alpha_2}{2\sqrt{p}} + \frac{2\alpha_1 p}{3} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial y}{\partial x_3} &= \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha_3}{2\alpha_1^{\frac{3}{2}} p^{\frac{3}{2}}} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1 p^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{1}{\alpha_1^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3} = \left(\alpha_1 \frac{p}{3} - \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1 p}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha_1}}.$$

Mais de

$$3x\sqrt{\alpha_1 p} = (\alpha_1 p)^{\frac{3}{2}} + 3\alpha_3,$$

on tire

$$\left(\frac{3\alpha_3}{2p} - \alpha_1^{\frac{3}{2}} p^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial x_3} = 3,$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{\frac{p}{\alpha_1}}}{\frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1 p}} - \frac{p\alpha_1}{3}};$$

donc

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} - q \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0.$$

Éliminons α_3 : on a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_1 p}} &= x - \frac{\alpha_1 p}{3}, \\ y &= \frac{p}{3} - \frac{1}{\alpha_1} \left(x - \frac{\alpha_1 p}{3} \right) = -\frac{x}{\alpha_1} + \frac{2p}{3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \sqrt{p}}, \\ z &= \alpha_2 \sqrt{p} + \frac{\alpha_1}{3} p^2. \end{aligned}$$

Le résultat de l'élimination de p est

$$\begin{aligned} [z_2(\alpha_1 y + x)^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 z]^2 &= [3\alpha_2^2(\alpha_1 y + x) - 2(\alpha_1 y + x)^2 z - \frac{8}{3}\alpha_1 z^2] \\ &= [6\alpha_1 z_2^2 - (\alpha_1 y + x)^3 - \frac{4}{3}\alpha_1 z(\alpha_1 y + x)] = 0 \end{aligned}$$

1. *Problème inverse.* — Prenons

$$y = -\frac{x}{\alpha_1} + \frac{2t^2}{3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3} \alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^3$$

ou

$$z - \alpha_2 t - \frac{\alpha_1}{3} t^3 = 0, \quad \alpha_1 y + x - \frac{2}{3} \alpha_1 t^2 + \frac{\alpha_2}{t} = 0.$$

Les équations du système intégral seront, avec celles-là.

$$p = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{1}{\alpha_1} = \left(\frac{4}{3} t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2} \right) \frac{\partial t}{\partial x},$$

d'où

$$\alpha_1 p = \alpha_1 t^2, \quad p = t^2,$$

$$q = \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial y}, \quad 1 = \left(\frac{4}{3} t + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 t^2} \right) \frac{\partial t}{\partial y}, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

puis

$$\frac{t^3}{3} + \frac{\left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x_1}}{K} = \frac{t + \left(\alpha_2 + \frac{4}{3} \alpha_1 t^3 \right) \frac{\partial t}{\partial x_2}}{K'}.$$

avec

$$y - \frac{2}{3} t^2 + \frac{\partial t}{\partial x_1} \left(-\frac{4}{3} \alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_1} = \frac{t^2 \left(y - \frac{2}{3} t^2 \right)}{\frac{4}{3} \alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

$$\frac{1}{t} + \frac{\partial t}{\partial x_2} \left(-\frac{4}{3} \alpha_1 t - \frac{\alpha_2}{t^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x_2} = \frac{t}{\frac{4}{3} \alpha_1 t^3 + \alpha_2},$$

d'où

$$\frac{\frac{t^3}{3} + t^2 \left(y - \frac{2}{3} t^2 \right)}{K} = \frac{2t}{K'}, \quad y - \frac{2}{3} t^2 = -\frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

de sorte que

$$p = t^2, \quad q = \alpha_1 t^2,$$

$$z = \alpha_2 t + \frac{\alpha_1}{3} t^3,$$

$$y = \frac{t^2}{3} + \frac{A}{t},$$

$$x = \frac{1}{3} \alpha_1 t^2 - \frac{A \alpha_1 + \alpha_2}{t}.$$

C. Q. F. T.

Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières;
par M. PEROTT.

(Séance du 21 juillet 1882.)

Soit

$$f(x) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$$

un polynôme quelconque à coefficients entiers; il est toujours possible de trouver une limite supérieure de la moyenne arithmétique des modules des racines de l'équation

$$f(x) = 0.$$

Désignons par δ cette limite, nous aurons pour toute valeur de k

$$(1) \quad \left| \frac{a_k}{a_0} \right| < \frac{n!}{k! (n-k)!} \delta^k,$$

car on a toujours

$$\sqrt[r]{\frac{\sum |a_{p_1}| |a_{p_2}| \dots |a_{p_r}|}{n!}} \leq \sqrt[s]{\frac{\prod |a_{p_1}| |a_{p_2}| \dots |a_{p_s}|}{s! (s-n)!}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

pour $r < s$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant n quantités quelconques.

Les coefficients des diviseurs de $f(x)$ devront nécessairement vérifier l'inégalité (1) et, par conséquent, il suffit d'essayer la division par un nombre fini de polynômes pour obtenir la décomposition de $f(x)$ en ses facteurs premiers.

On pourra réduire le nombre des tentatives à faire par les considérations suivantes :

Soient

$$f_1(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots,$$

$$f_2(x) = c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \dots$$

deux polynômes dont le produit est égal à $f(x)$; nous savons d'abord que b_0 et c_0 doivent être deux diviseurs complémentaires de a_0 . Le choix de ces deux diviseurs une fois fixé, on obtient les coefficients b_1 et c_1 par l'équation suivante :

$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = a'_1.$$

Cette équation donnera les valeurs de b_1 et de c_1 en fonction

d'un paramètre t , sauf le cas d'impossibilité qui montrerait que les coefficients b_0 et c_0 ont été mal choisis. Le paramètre t ne pouvant avoir qu'un nombre fini de valeurs, il en sera de même de b_1 et de c_1 . Le choix de ces deux coefficients une fois fixé, on obtiendra les coefficients b_2 et c_2 à l'aide d'une nouvelle équation indéterminée, et ainsi de suite.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 21 AVRIL 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Poincaré et Brésard, présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Stephanos; MM. L. Kronecker et Genocchi présentés dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. G. Tarry : *Théorèmes divers sur les centres de gravité.* —

M. Stephanos donne à cette occasion un théorème *Sur les figures homographiques.*

M. Lebon : *Extension de la construction donnée par M. Rouché pour l'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une droite au cas d'une surface de révolution quelconque du second degré, sauf le paraboloid.*

M. Stephanos : *Sur un rapprochement entre la Trigonométrie sphérique et la théorie de trois formes binaires simultanées.*

SÉANCE DU 5 MAI 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

M. L. Hugo adresse une Note manuscrite *Sur un dodécaèdre en bronze trouvé en Suisse.*

M. Laisant présente une Note manuscrite de M. Laquière, inti-

tulée : *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité.*

Communications :

M. Stephanos : *Sur le calcul barycentrique de Mobius.*

M. Halphen : *Sur une classe d'intégrales pseudo-elliptiques.*

M. Weill : *Sur trois coniques ayant quatre points communs.*

SÉANCE DU 19 MAI 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : M. Habich, présenté dans la dernière séance par MM. Perrin et Picquet; MM. N. Zaboudsky et D. Selivanoff, présentés par MM. Halphen et Darboux; M. Ch. Henry, présenté par MM. Laisant et Lucas, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un solide qui n'est soumis à aucune force.*

M. Selivanoff : *Sur les intégrales définies uniformément convergentes.*

M. Stephanos : *Sur certains déterminants fonctionnels.*

M. Perrin : *Sur une méthode de résolution pour l'équation du quatrième degré.*

SÉANCE DU 2 JUIN 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : MM. Wilson, Cheysson et Bère, présentés dans la dernière séance par MM. Laisant et Dreyfus; M. Zeller, présenté par MM. Halphen et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Lebon : *Sur l'intersection de deux surfaces du second degré.*

M. Selivanoff : *Sur les intégrales uniformément convergentes.*

M. Stephanos : *Sur une généralisation du rapport anharmonique.*

M. Halphen : *Sur le Mémoire de Riemann qui traite de la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.*

SÉANCE DU 16 JUIN 1882.

PRÉSIDENCE DE M. HALPHEN.

L'Académie des Sciences physiques et mathématiques de Naples envoie la collection de ses *Rendiconti*, en échange de celle du Bulletin de la Société.

M. Lucas analyse un Mémoire manuscrit de M. Pellet *Sur les résidus cubiques et biquadratiques suivant un module premier.*

M. Gascheau adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel.*

Communications :

M. Halphen : *Sur les sextiques à neuf points doubles.*

M. Stephanos : *Sur les éléments imaginaires en Géométrie.*

M. Lucas : *Sur les carrés diaboliques.*

M. Lucas est délégué pour représenter la Société au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences à la Rochelle.

SÉANCE DU 7 JUILLET 1882

PRÉSIDENCE DE M. ANDRÉ.

Élections : M. Léon Lévy, présenté dans la dernière séance par MM. Aron et Halphen, est élu membre de la Société.

M. Schlegel adresse un Mémoire manuscrit : *Sur quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions.*

SÉANCE DU 21 JUILLET 1882.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Élections : M^{me} Sophie de Kovalewski, présentée à la dernière séance par MM. Stephanos et Picquet; M. Aubert, présenté par MM. André et Lucas, sont élus membres de la Société.

M. Perott adresse une Note manuscrite *Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières.*

M. Lemonnier adresse un Mémoire manuscrit *Sur la recherche d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, et sur le problème inverse.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DEPUIS LE 7 AVRIL 1882.

Tarry (G.) : *Relation générale entre sept points d'une conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques.* (Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*)

Günther : *Operative Arithmetik und Geometrie der Gittersysteme.* (Extrait des *Zeitschrift für math. und naturw. Unterr.*) *Pamiętnik Akademii umiejetnosci w Krakowie. Wydział matematyczno-przyrodniczy.* Tom szosty. W Krakowie, 1881.

Günther : *Comptes rendus des Ouvrages suivants :*

Cantor (M.) : *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig, 1880.

Henry (Ch.) : *Galilée, Torricelli, Cavalieri, Castelli.* Rome, 1880.

Günther : *Die platonische Zahl.*

Rapport de la Commission parlementaire chargée d'examiner la

(1) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir page 10).

proposition de MM. Laisant, P. Bert et Hervé Mangon, relative aux OEuvres de Fermat.

Gaspard Monge : *Traité élémentaire de Statique* (seconde édition, an III). Exemplaire offert par M. L. Hugo.

Schwedoff (Th.) : *Configurations de la grande comète de 1882, prédites d'après la théorie des ondes cosmiques*. Odessa, 1882.

Catalan : *Sur les fonctions X_n de Legendre* (second Mémoire, extrait des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*).

Stephanos : *Sur quelques propriétés du système de trois figures égales situées dans un même plan*. (Extrait du *Bulletin de la Société philomathique*.)

Schwedoff (Th.) : *Sur l'origine de la grêle*. Odessa, 1882.

Kœnigs : *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*. (Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, 1882.)

Catalan : *Problèmes et théorèmes d'Arithmétique*. (Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*.)

Zeuthen : *Grundriss einer elementar-geometrischen Kegel-schnittslehre*. Leipzig, 1882.

Brill : *Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades*. (Extrait des *Mathematische Annalen*.)

ERRATA DU TOME X.

Page 20, Tableau des prix des tirages à part, dernière ligne : au lieu de 34,75; lisez 36,75.

Page 86, dernière formule, au lieu de $\int_0^\infty e^{\lambda x - \lambda z} d\lambda$, lisez $\int_0^1 \dots$

Page 140, ligne 27, au lieu de C', lisez C.

Page 190, ligne 23, au lieu de *parallélépipède*, lisez *parallélipède*.

Page 220, ligne 20, colonne de droite, au lieu de $\frac{1}{5 \cdot 6} (m+1)(m^2-1)$, lisez $\frac{1}{5 \cdot 6} (m+3)(m^2-1)$.

Page 222, ligne 20, après $CB = 3BA$, ajoutez *on trouve que*.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME X.

	Pages.
État de la Société mathématique de France au 1 ^{er} janvier 1882.....	5
Statuts de la Société.....	13
Règlement administratif.....	14
Avis relatif aux tirages à part.....	20
Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre; par M. LINDEMANN..	21
Sur certaines propriétés des centres de gravité; par M. LAISANT.....	40
Sur l'équation linéaire qui relie au module la fonction complète de première espèce; par M. GOURSAT.....	44
Remarques sur la théorie des régions et des aspects; par M. LAISANT.....	52
Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. WEILL.....	55
Sur des cas de réduction des fonctions Θ de plusieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre nombre de variables; par M. APPELL.....	59
Sur une série d'Abel; par M. HALPHEN.....	67
Sur un théorème de Gauss; par M. PEROTT.....	87
Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques; par M. GUNTHER..	88
Extraits des procès-verbaux (séances du 4 novembre 1881 au 7 avril 1882)..	97
Bulletin bibliographique.....	102
Sur le problème des aspects; par M. PERRIN.....	103
Sur les polygones dont les côtés sont tangents à une courbe, et dont tous les sommets sont sur la courbe; par M. WEILL.....	127
Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés des centres de gravité; par M. LAQUIÈRE.....	131
Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes quadratiques binaires; par M. STEPHANOS.....	134
Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. WEILL.....	137
Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs; par M. PERRIN.....	139
Sur les intégrales uniformément convergentes; par M. SELIVANOFF.....	147
Sur les résidus cubiques et biquadratiques, suivant un module premier; par M. PELLET.....	157

Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles; par M. HAV- PILN.....	162
Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions; par M. SCHLEGEL.....	172
Étude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel; par M. GASCHER.....	207
Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques; par M. SCHOUTE.....	219
Sur le théorème de M. Laisant relatif aux centres de gravité; par M. SCHLEGEL.....	220
Sur le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée; par M. SCHOUTE.....	222
Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n va- riables indépendantes; par M. LEMONNIER.....	223
Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières; par M. PEROTT.....	250
Extraits des procès-verbaux (séances du 21 avril au 21 juillet 1882).....	251
Bulletin bibliographique.....	254
<i>Errata</i>	256

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS.

7690

Quai des Augustins, 55.



BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

COMMISSION D'IMPRESSION.

(ART. 20 DU RÈGLEMENT ADMINISTRATIF.)

MM. PICQUET,	}	Secrétaires de la Société.
WEILL,		
COLLIGNON,	}	Membres du Conseil.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE,		
JORDAN,		
MANNHEIM.		

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME ONZIÈME. — ANNÉE 1882-83

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

—
1883

$$\begin{array}{r} 12544 \\ \hline 28 \overline{) 1191} \end{array}$$

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU MOIS DE JANVIER 1883 (¹).

Les initiales S. P. désignent les Sociétaires perpétuels.

Président.....	M. ROUCHÉ.
Vice-Présidents.....	{ M. COLLIGNON. M. FOURET. M. LUCAS. M. PERRIN.
Secrétaires.....	{ M. PICQUET. M. WEILL.
Vice-Secrétaires.....	{ M. KOENIGS. M. POINCARÉ.
Archiviste.....	M. STEPHANOS.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil.....	{ M. ANDRÉ. M. APPELL. M. CLAYEUX. M. DARBOUX. M. DE LA GOURNERIE. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. LAISANT. M. MANNHEIM. M. PICARD.
Membres du Conseil non résidents..	{ M. CREMONA. M. GENTY. M. MATHIEU. M. WEYR (Émile).

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

- ACHARD, directeur-adjoint de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de Chabrol, 40, à Paris.
- AMIGUES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, boulevard du Musée, 66, à Marseille.
- ANDRÉ (Désiré), docteur ès Sciences, rue Gay-Lussac, 25, à Paris.
- AOUST (l'abbé), professeur à la Faculté des Sciences, rue Espérandieu, 19, à Marseille.
- APPELL, maître de conférences à l'École Normale supérieure, rue Soufflot, 22, à Paris.
- ARON (Henri), banquier, rue de Grammont, 14, à Paris.
- ASTOR, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Rancher, 2, à Nice.
- AUBERT, élève-ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 96, à Paris.
- AUTONNE, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue des Beaux-Arts, 13, à Paris.
- BENOIST (Adolphe), docteur en droit, place du Châtelet, 3, à Chalon-sur-Saône (Saône-et-Loire), S. P.
- BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).
- BÈRE, ingénieur des manufactures de l'État, à Lille.
- BERTRAND (Joseph), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, rue de Seine, 6, à Paris.
- BISCHOFFSHEIM, banquier, rue Taitbout, 3, à Paris, S. P.
- BIENAYMÉ (Arthur), ingénieur de la Marine, rue Claude-Bernard, 63, à Paris.
- BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- BONCOMPAGNI (le prince Balthazar), place Colonna, palais Piombino, à Rome.
- BONNET (Ossian), membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 14, à Paris.
- BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé), S. P.
- BOUCHER, ancien directeur de l'École préparatoire des Sciences et Lettres, rue du Pin, 9, à Angers.
- BOULANGER, professeur de Mathématiques, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
- BRALT (A.), négociant à Pons (Charente-Inférieure).
- BRÉGET, membre de l'Institut, quai de l'Horloge, 39, à Paris.
- BRÉMAUD, architecte, boulevard Malesherbes, 16, à Paris.
- BRÉSARD, professeur au lycée Fontanes, rue Vézelay, 3, à Paris.
- BRIOSCHI, directeur de l'École Polytechnique, à Milan (Italie).
- BRISSE (Ch.), répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 22, à Paris.
- BROCARD, capitaine, chef du Génie, à Dellys (Algérie), S. P.
- CARON, professeur de Géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 82, à Paris.
- CATALAN, professeur à l'Université, rue François-Miron, 14, à Liège (Belgique).
- CHASLES, membre de l'Institut (décédé), S. P.
- CHÉMIN, ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de Rennes, 73, à Paris.
- CHÉYSSON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, boulevard Saint-Germain, 128, à Paris.
- CIVIALE, rue de la Tour-des-Dames, 2, à Paris.
- CLAYEIN, intendant divisionnaire, avenue de Clichy, 52, à Paris.
- CLAUDE-LAFONTAINE, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris, S. P.
- COLLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
- COLLIGNON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, rue des Saints-Pères, 28, à Paris.
- COMBERIOISSE (de), professeur à l'École Centrale, rue Blanche, 45, à Paris.
- COURCELLES, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 68, à Paris.
- CREMONA, directeur de l'École des Ingénieurs, à Rome.
- CRÉTIN, professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 107, à Paris.
- DARBOIX, professeur à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.
- DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, place de l'École d'Artillerie, à Toulouse.
- DEFFORGES, capitaine d'infanterie, attaché à l'Etat-major du Ministre de la Guerre, rue de Grenelle Saint-Germain, 113, à Paris.
- DELANNOY, sous-intendant militaire, à Orléans.
- DEWULF, lieutenant-colonel, chef du Génie, à Montpellier.
- DOSTOR, docteur ès sciences, rue de Rennes, 121, à Paris.
- DREYFUS (Ferdinand), publiciste, rue de l'Université, 25, à Paris.

- DURRANDE, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
ESCARY, professeur au Prytanée militaire, à la Flèche (Sarthe).
FAURE, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Trudaine, 26, à Paris.
FLOQUET, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jeanne-d'Arc, 9, à Nancy.
FLYE SAINTE-MARIE, répétiteur à l'École Polytechnique, rue du Sommerard, 12, à Paris.
FONTÈS, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Toulouse.
FOURET, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Washington, 16, à Paris.
GABRIEL, ingénieur des Ponts et Chaussées, agrégé de la Faculté de Médecine, rue Joffroy, 39, à Paris-Batignolles.
GASCHEAU, professeur honoraire de la Faculté des Sciences, rue Boulbonne, 50, à Toulouse.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris, S. P.
GENOCCHI, professeur à l'Université, rue du Pò, 38, à Turin (Italie).
GENTY, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Oran.
GERONO, rue Hallé, 40 et 42, à Paris.
GIBOD (A.), ingénieur des Manufactures de l'État, rue de Vaugirard, 23, à Paris.
GOFFART, boulevard des Batignolles, 84, à Paris.
GOURNERIE (DE LA), membre de l'Institut, rue de Mailly, 7, à Paris.
GOURSAT, professeur à la Faculté des Sciences, rue Riguepels, 22, à Toulouse.
GRAINDORGE, professeur à l'Université, rue Paradis, 92, à Liège (Belgique).
GRUEY, directeur de l'Observatoire, à Besançon.
GUCCIA (Jean), viâ Ruggiero Settimo, 28, à Palerme (Sicile).
GUÉLOT, chef de bataillon, commandant le 10^e bataillon de chasseurs à pied, à Saint-Dié (Vosges).
GUTHIER (D^r Sigismond), député au Reichstag allemand, à Ansbach (Bavière).
HAAG, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 1, à Paris.
HABICH, directeur de l'École des Mines, à Lima (Pérou).
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Sainte-Anne, 51, à Paris, S. P.
HATON DE LA GOUPILLIÈRE, ingénieur en chef des Mines, rue Garancière, 8, à Paris, S. P.
HATT, ingénieur hydrographe, rue de l'Université, 13, à Paris.
HENRY, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, à Privas (Ardèche).
HENRY (Charles), bibliothécaire à la Sorbonne, rue Berthollet, 22, à Paris.
HERMARY, chef d'escadrons au 17^e régiment d'Artillerie, à Douai (Nord).
HERMITE, membre de l'Institut, rue de la Sorbonne, 2, à Paris, S. P.
HILAIRE, professeur de Mathématiques, rue d'Arras, 4, à Douai (Nord).
HIRST, directeur des études de l'École navale, à Greenwich (Angleterre), S. P.
HOLST (Elling), stipendiat de l'Université, à Christiania (Norvège).
HOUBIGANT, chef de bataillon du Génie en retraite, rue Lecourbe, 88, à Paris.
HUGO (Comte L.), traducteur au Ministère des Travaux publics, rue des Saints-Pères, 14, à Paris.
HUGONOT, capitaine d'Artillerie de la Marine, rue de l'Arsenal, 11, à Paris.
HUMBERT, ingénieur des Mines, à Vesoul (Haute-Saône).
HUVOT, ingénieur des Mines, rue du Cirque, 10, à Paris.
IMBER, répétiteur à l'École Centrale, boulevard Beaumarchais, 109, à Paris.
JACQUIER, ingénieur des Ponts et Chaussées, directeur des Travaux publics à Saint-Denis (Réunion).
JANIN, capitaine au 32^e régiment d'Artillerie, à Orléans.
JAVARY, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Le-moine, 28, à Paris.
JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique, rue de Varennes, 48, à Paris, S. P.
JOUFFRET, chef d'escadrons d'Artillerie, à Palaiseau (Seine-et-Oise).
JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, à Milan (Italie).
KANTOR (S.), privat-docent à l'École polytechnique allemande, à Prague.
KŒNIGS, bibliothécaire à l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris.
KOSTENEK (Antoine), professeur au lycée communal, à Prague (Bohême).
KOVALEWSKY (M^{me} DE), rue des Feuillantines, 9, à Paris.

- KRONECKER (Dr Léopold), professeur à l'Université, Bellevuestrasse, 13, à Berlin.
- LACOR, chargé de cours à la Faculté libre des Sciences, rue des Pyramides, 4, à Lille.
- LAFFON DE LADÉBAT, amiral (décédé), S. P.
- LAGUERRE, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 61, à Paris.
- LAISANT, député, avenue Victor Hugo, 84 bis, à Paris.
- LAQUIÈRE, administrateur attaché au service central des Affaires indigènes, à Alger.
- LAUTH, manufacturier, à Thann (Alsace).
- LAVEISSIÈRE, élève externe à l'École des Mines, rue de la Verrerie, 58, à Paris.
- LÉALITÉ, directeur des études à l'École Monge, 141, boulevard Malesherbes, à Paris.
- LEBON (Ernest), professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 121, à Paris.
- LECORNU, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Caen (Calvados).
- LEFÈVRE, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, à Tours.
- LEMOINE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Cherche-Midi, 55, à Paris.
- LE PAIGE, professeur à l'Université, rue des Anges, 21, à Liège (Belgique).
- LE PONT, rue du Bouloi, 11, à Paris.
- LESAGE, professeur au lycée Charlemagne, rue Monge, 27, à Paris.
- LESPIAULT, professeur à la Faculté des Sciences, à Bordeaux.
- LÉVY (Léon), ingénieur des Mines, rue de Logelbach, 9, à Paris.
- LÉVY (Lucien), professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Claude-Bernard, 58, à Paris.
- LÉVY (Maurice), professeur à l'École Centrale, boul. Saint-Germain, 258, à Paris.
- LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
- LIGUINE, professeur à l'Université, à Odessa (Russie).
- LINDEMANN, professeur à l'Université, Mottkestrasse, 13, à Fribourg-en-Brisgau (Allemagne).
- LONGCHAMPS (GOMIERRE DE), professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne, rue de l'Estrapade, 15, à Paris.
- LORIN, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du faubourg Saint-Honoré, 186, à Paris.
- LUCAS, professeur au lycée Saint-Louis, rue du Bellay, 2, à Paris.
- MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue de l'Odéon, 21, à Paris.
- MALEYX, professeur au collège Stanislas, rue Notre-Dame-des-Champs, 117, à Paris.
- MALLOIZEL, rue de l'Estrapade, 11, à Paris.
- MALMSTÉN, conseiller d'État, à Upsal (Suède).
- MANXBENI, professeur à l'École Polytechnique, rue de la Pompe, 11, à Paris-Passy, S. P.
- MARSILLY (le général de), rue Chante-Pinot, à Auxerre.
- MATHIEU (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, rue du Faubourg-Saint-Jean, 22, à Nancy.
- MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).
- MOUTARD, examinateur à l'École Polytechnique, rue du Val-de-Grâce, 9, à Paris.
- OCAGNE (n'), élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, rue de l'Arcade, 58, à Paris.
- OHRTMANN (Dr Carl), rédacteur du *Jahrbuch*, Markgrafenstrasse, 78, à Berlin.
- OYIDO (Enrico n'), professeur à l'Université, piazza Statuto, 17, à Turin.
- PANEK (Auguste), professeur au lycée communal, à Prague (Bohème).
- PARENTIER (le général), membre du Comité des fortifications, rue du Cirque, 5, à Paris.
- PAUBAN, ingénieur des Mines, avenue de l'Opéra, 26, à Paris.
- PATIERET, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Jacob, 44, à Paris.
- PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, à Clermont-Ferrand.
- PERCIN, chef d'escadrons d'Artillerie, à l'École spéciale militaire, à Saint-Cyr.
- PERPIN, ingénieur des Mines, rue de Grenelle, 80, à Paris.
- PÉROT (Joseph), à Port-Navalo, par Arzon (Morbihan), S. P.
- PHILIPPON, secrétaire de la Faculté des Sciences, à la Sorbonne, à Paris.
- PICARD (Émile), professeur suppléant à la Faculté des Sciences, rue de la Sorbonne, 2, à Paris.

- PICQUET, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Michel, 103, à Paris.
- PISTOYE (DE), capitaine d'Artillerie, rue Montbaurin, 20, à Versailles.
- POINCARÉ, ingénieur des Mines, maître de Conférences à la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 66, à Paris,
- POKORNY (Martin), directeur du lycée communal, à Prague (Bohème).
- POLIGNAC (prince C. DE), rue Miroménil, 44, à Paris, S. P.
- POUSSET, professeur au lycée, à Poitiers.
- PRESLES (DE), sous-intendant militaire, rue de Bellechasse, 29, à Paris.
- PRICE (Bartholoméo), professeur à l'Université, à Oxford (Angleterre).
- PEISEUX, membre de l'Institut, boulevard Saint-Michel, 81, à Paris.
- PUTZ (le général), commandant l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, à Fontainebleau (Seine-et-Marne).
- RADAU, rue de Tournon, 12, à Paris.
- RANCY (DE), directeur général de la Compagnie d'assurances *le Soleil*, rue de Châteaudun, 44, à Paris.
- REINACH (baron DE), banquier, rue de la Bourse, 1, à Paris.
- REY (Casimir), professeur à l'École régimentaire du Génie, boulevard de la Reine, 25, à Versailles.
- RIBAUDOUR, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Aix (Bouches-du-Rhône).
- RIBOT, professeur de Mathématiques spéciales au lycée, rue Jacotot, 1, à Dijon.
- RODET, ingénieur à la Manufacture des tabacs, quai d'Orsay, à Paris.
- ROLLAND, membre de l'Institut, rue de Rennes, 66, à Paris.
- ROUART, ingénieur civil, boulevard Voltaire, 137, à Paris.
- ROUCHÉ (Eugène), professeur à l'École Centrale, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 213, à Paris.
- ROUSSELIN, professeur au lycée Fontanes, boulevard Pereire, 124, à Paris.
- ROUX, architecte, rue de l'Arcade, 25, à Paris.
- SAINT-PAUL (DEUX DE), capitaine au 36^e régiment d'Artillerie, à Clermont-Ferrand.
- SARRAU, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Bondy, 24, à Paris.
- SARTIAUX, ingénieur des Ponts et Chaussées, à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
- SCHLEGEL (Dr Victor), à Waren (Allemagne).
- SCHOUTE, professeur à Groningue (Hollande).
- SCHUBERT, professeur, Steindam, 89, à Hambourg (Allemagne).
- SÉGUY, rue Pascal, 2, à Paris.
- SÉLIVANOFF, attaché à l'Université, à Saint-Petersbourg.
- SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, rue de Miroménil, 70, à Paris.
- SIVERING (Jos.), ingénieur en chef des travaux publics, place du Saint-Esprit, 9, à Luxembourg.
- SMITH (H.-J.-S.), professeur à l'Université, University Museum, à Oxford (Angleterre).
- SONNE (Nicolas), professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).
- STAROFF (Alexis), professeur à l'École de Commerce, rue Forgowaja, 49, à Odessa (Russie).
- STEPHANOS (Dr Cyparissos), rue de l'Arbalète, 28, à Paris.
- STUDNICKA, professeur à l'Université, à Prague (Bohème).
- TANNERY (Paul), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre, S. P.
- TANNERY, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, boulevard Saint-Michel, 141, à Paris.
- TARRY (Gaston), receveur des Contributions diverses, rue Clauzel, à Alger.
- TCHÉRICHEFF, membre de l'Académie des Sciences, à Saint-Petersbourg.
- TERRIER, professeur de Mathématiques, rue Monsieur-le-Prince, 18, à Paris.
- TISSOT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Pont-de-Claix (Isère).
- TISSERAND, membre de l'Institut, avenue de l'Observatoire, 5, à Paris.
- THESCA, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Saumur (Maine-et-Loire).
- VACQUANT, inspecteur général de l'Université, boulevard Saint-Michel, 12, à Paris.
- VANECEK, professeur au lycée, à Jičín (Bohème).

VAZEILLE, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 26, à Paris.
VICAIRE, ingénieur des Mines, rue Gay-Lussac, 30, à Paris.
VIELLARD, manufacturier, aux forges de Morvillars (territoire de Belfort).
VOLLOT (Jules), professeur de Mathématiques au lycée, à Alger.
WALCKENAER, ingénieur des Mines, à Pau (Basses-Pyrénées).
WEILL, professeur de Mathématiques, rue de Rome, 14, à Paris.
WEYR (Dr Édouard), professeur à l'École Polytechnique, à Prague (Bohème).
WEYR (Dr Émile), professeur à l'Université, Marokkanergasse, 1, à Vienne (Autriche).
WILSON, député, au palais de l'Élysée, à Paris.
WORMS DE ROMILLY, ingénieur des Mines, rue de Balzac, 7, à Paris.
ZABOTDSKY, capitaine de l'Artillerie russe, professeur à l'École d'Artillerie, à Saint-Petersbourg.
ZELLER (Charles), recteur du séminaire, à Markgröningen (Wurtemberg).
ZETHEN, professeur à l'Université, Citadelsvej, 9, à Copenhague.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

BENOIST, docteur en droit.
BISCHOFFSHEIM, banquier.
BIENAYMÉ, membre de l'Institut (décédé).
BORCHARDT, membre de l'Académie des Sciences de Berlin (décédé).
BROCARD, capitaine du Génie.
CHARLES, membre de l'Institut (décédé).
CLAUDE-LAFONTAINE, banquier.
GAUTHIER-VILLARS, éditeur.
HALPHEN, répétiteur à l'École Polytechnique.
HATON DE LA GÖPILLIÈRE, ingénieur en chef des Mines.
HERMITE, membre de l'Institut.
HIRST, directeur des études de l'École navale de Greenwich.
JORDAN, membre de l'Institut.
LAFFOX DE LADÉBAT, amiral (décédé).
MANNHEIM, professeur à l'École Polytechnique.
PEROTT (Joseph).
POLIGNAC (prince C. de).
TANNERV (Paul), ingénieur des manufactures de l'État.

Modifications survenues depuis le 1^{er} janvier 1882.

DÉCÉDÉS.

BRIOT, capitaine d'infanterie de la Marine.
LEMONNIER, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

DÉMISSIONNAIRES.

ANTOINE, ingénieur de la Marine.
ASSELIN, élève externe à l'École des Mines.
BHSSE (A.), ingénieur (art. 42 du règlement administratif).
DESQ, capitaine d'Artillerie (art. 42 du règlement administratif).
KÖHLER, professeur de Mathématiques.
MIGYON, chef d'escadrons d'Artillerie.
SALTEL, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux (art. 42 du règlement administratif).
STEPHAN, directeur de l'Observatoire de Marseille (art. 42 du règlement administratif).
TIERQUAN, docteur ès sciences.

NOUVEAUX MEMBRES.

AUBERT, élève-ingénieur des Mines.
AUTONNE, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.
BÈRE, ingénieur des manufactures de l'État.
BRÉSARD, professeur au lycée Fontanes.
CHEYSSON, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.
DAVID, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite.
DELANNOY, sous-intendant militaire.
DREYFUS (Ferdinand), publiciste.
GASCHEAU, professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Toulouse.
GENOCCHI, professeur à l'Université de Turin.
HABICH, directeur de l'École des Mines de Lima.
HENRY (Ch.), bibliothécaire à la Sorbonne.
HUGONJOT, capitaine d'artillerie de la Marine.
KOSTENEC, professeur au lycée communal, à Prague.
KOVALEWSKI (M^{me} DE).
KRONECKER (Dr Léopold), professeur à l'Université de Berlin.
LE PONT,
LESAGE, professeur au lycée Charlemagne.
LÉVY (Léon), ingénieur des Mines.
LÉVY (Lucien), professeur au lycée Louis-le-Grand.
MACÉ DE LÉPINAY, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV.
OCAGNE (D'), élève-ingénieur des Ponts et Chaussées.
OHRTMANN (Dr Carl), rédacteur du *Jahrbuch*.
PANEK, professeur au lycée communal, à Prague.
PATURET, ancien élève de l'École Polytechnique.
POINCARÉ, ingénieur des Mines, maître de conférences à la Sorbonne.
POKORNY, directeur du lycée communal, à Prague.
SÉLIVANOFF, attaché à l'Université de Saint-Petersbourg.
SIMART, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale.
SMITH (H.-J.-S.), professeur à l'Université d'Oxford.
TARRY, receveur des contributions diverses, à Alger.
TCHEBICHEFF, membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg.
VIELLARD, manufacturier.
WILSON, député.
ZABOUDSKY, capitaine de l'Artillerie russe.
ZELLER (Ch.), recteur du séminaire de Markgrœningen.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.
Académie des Sciences de Berlin.
Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.
Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, à Bruxelles.
Académie des Arts et des Sciences du Connecticut (Etats-Unis d'Amérique).
Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.
Académie des Sciences de Paris.
Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg.
Académie des Sciences de Prague.
Académie Royale des *Lincci*, à Rome.
Académie Impériale des Sciences de Vienne.
Acta Mathematica (rédacteur M. Mittag-Leffler, à Stockholm).

- American Journal of Mathematics* (rédacteur M. Sylvester, à Baltimore).
Annali di Matematica (rédacteur M. Brioschi, à Milan).
Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (rédacteurs MM. S. Lie et W. Muller, à Christiania).
Association française pour l'avancement des Sciences, à Paris.
Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques (rédacteur M. Darboux).
Casopis pro pestování matematiky a fysiky (rédacteur M. Studnicka, à Prague).
École Royale Normale supérieure de Pise.
Giornale di Matematiche (rédacteur M. Battaglini, à Rome).
Institut Royal de Luxembourg.
Institut Royal lombard des Sciences et Lettres, à Milan.
Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts, à Venise.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (rédacteur M. Carl Ohrtmann, à Berlin).
Jornal de Sciencias Matematicas e Astronomicas (rédacteur M. Gomes Teixeira, à Coïmbre).
Journal de l'École Polytechnique.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, à Berlin.
Mathematische Annalen (rédacteur M. Felix Klein, à Leipzig).
Mathesis (rédacteurs MM. Mansion, à Gand, et Neuberg, à Liège).
Réunion des officiers, à Lille.
Société mathématique d'Amsterdam.
Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.
Société Royale d'Édimbourg.
Société des Sciences de Finlande, à Helsingfors.
Société Royale des Sciences de Goettingue.
Société mathématique de Hambourg.
Société hollandaise des Sciences, à Harlem (Hollande).
Société mathématique de Kharkoff (Russie).
Société astronomique de Londres.
Société mathématique de Londres.
Société Royale de Londres.
Société mathématique de Moscou.
Société mathématique d'Odessa (Russie).
Société philomathique de Paris.
Société mathématique de Prague.
Société Royale des Sciences de Saxe, à Leipzig.
Société Royale des Sciences d'Upsal (Suède).
Société des Sciences naturelles de Zurich.
Université Royale de Pise.
Tidsskrift for Mathematik (rédacteur M. Zenthen, à Copenhague).
Tijdschrift voor Wiskunde, rekenkunde en de beginselen der Fyskunde (rédacteur M. Versluys, à Amsterdam).
-

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Quelques questions de probabilités résolues géométriquement ;
par M. E. LEMOINE.

(Séance du 3 novembre 1882.)

J'ai donné à la Société mathématique, l'année de sa fondation, un petit problème de probabilités qui a eu ensuite le grand honneur d'attirer l'attention de plusieurs mathématiciens. MM. Halphen et Jordan en ont ici même, successivement, donné des généralisations ; divers géomètres s'en sont occupés dans la *Correspondance mathématique* de M. Catalan, dans les *Nouvelles Annales*, dans le *Journal Mathesis* et enfin M. Lalanne dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. C'est après la lecture de ce dernier travail que j'ai eu l'idée des développements qui vont suivre. L'énoncé du problème primitif était celui-ci : *On casse au hasard une barre en trois morceaux, quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois morceaux ?*

I.

On prend au hasard un point M dans l'intérieur d'un triangle quelconque ABC, quelle est la probabilité pour que, si

de ce point on abaisse des perpendiculaires MA_1, MB_1, MC_1 , sur les trois côtés :

1° On puisse former un triangle avec MA_1, MB_1, MC_1 ;

2° Pour que l'on puisse former un triangle qui n'ait que des angles aigus?

Occupons-nous de la première partie.

Soient A', B', C' les pieds des bissectrices intérieures sur les trois côtés, si l'on joint $A'B', B'C', C'A'$, il est facile de voir que, pour tout point M de l'intérieur du triangle $A'B'C'$, on a

$$MA_1 < MB_1 + MC_1,$$

$$MB_1 < MA_1 + MC_1,$$

$$MC_1 < MA_1 + MB_1,$$

c'est-à-dire que l'on peut former un triangle avec MA_1, MB_1, MC_1 ; car, pour tout point M situé entre $B'C'$ et BC , on a

$$MA_1 < MB_1 + MC_1;$$

pour tout point M situé sur $B'C'$ et BC ,

$$MA_1 = MB_1 + MC_1;$$

pour tout point M situé entre $B'C'$ et A ,

$$MA_1 > MB_1 + MC_1;$$

de même pour les deux autres droites $B'A'$ et $A'C'$, etc.

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\text{surf. } A'B'C'}{\text{surf. } ABC};$$

en faisant le calcul, on trouve

$$(A) \quad \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Occupons-nous de la deuxième partie du problème.

Si nous appelons α, β, γ les distances MA_1, MB_1, MC_1 du point M aux trois côtés, ces distances sont les coordonnées de M par rapport au triangle de référence ABC .

Considérons la conique dont l'équation est

$$(1) \quad \alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2;$$

elle séparera les points du plan pour lesquels on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$$

de ceux pour lesquels on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 < \gamma^2.$$

On voit immédiatement que cette conique coupe le côté CB aux pieds des bissectrices intérieures et extérieures de A et γ est tangente à ces bissectrices, on voit de même qu'elle coupe le côté CA aux pieds des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle B et qu'elle y est tangente à ces bissectrices.

Enfin elle a pour centre le pôle de AB par rapport au cercle circonscrit.

On ferait des observations analogues sur les coniques dont les équations sont

$$(2) \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$$

et

$$(3) \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

qui sont tangentes deux à deux aux points A', B', C' et tangentes en ces points aux bissectrices AA', BB', CC'. Pour tout point du triangle curviligne A'B'C' compris entre elles, le triangle formé avec MA₁, MB₁, MC₁ n'aura que des angles aigus. Appelons :

S_a la surface du segment compris entre la courbe $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ et la droite B'C';

S_b la surface du segment compris entre la courbe $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$ et la droite A'C';

S_c la surface du segment compris entre la courbe $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ et la droite A'B'.

La probabilité cherchée sera

$$\frac{\text{surf. A'B'C'} - S_a - S_b - S_c}{\text{surf. ABC}}$$

et la probabilité pour que, si l'on a un triangle, ce triangle soit acutangle est

$$\frac{S_a + S_b + S_c}{\text{surf. A'B'C'}}.$$

Supposons que ABC soit tel que l'on ait

$$c > b > a.$$

et considérons la conique (1) :

Elle sera une hyperbole si $c^2 < a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est aigu ;

Elle sera une parabole si $c^2 = a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est droit ;

Elle sera une ellipse si $c^2 > a^2 + b^2$ ou si $\widehat{ACB}$ est obtus.

D'après notre hypothèse,

$$c > b > a.$$

les courbes (2) et (3) seront toujours des hyperboles ; il n'y aura donc, pour faire le calcul, que trois cas à examiner :

$\widehat{ACB}$ est aigu, S_a, S_b, S_c sont des segments d'hyperbole ;

$\widehat{ACB}$ est droit, S_a, S_b sont des segments d'hyperbole, S_c est un segment de parabole ;

$\widehat{ACB}$ est obtus, S_a, S_b sont des segments d'hyperbole, S_c est un segment d'ellipse.

Le calcul de ces aires, dans le cas général, est très facile, mais un peu long. S_c par exemple, dans le cas de $C < 90^\circ$, en désignant par S l'aire de ABC, est

$$\frac{S \cdot ab}{(a-c)(b-c)} - \frac{\sin C}{a^2 - c^2} \int_0^{\frac{ab}{b+c}} [ab(a-x) - c\sqrt{x^2(a^2 + b^2 - c^2)} - 2ab^2x + a^2b^2] dx;$$

l'intégration effectuée, on aura S_b et S_a par des permutations de lettres, etc.

Examinons seulement le cas particulier où ABC est équilatéral ; on a, dans ce cas,

$$MA_1 + MB_1 + MC_1 = \text{const.},$$

et il est facile de voir que les problèmes 1^{er} et 2^{es} reviennent à ceux-ci.

On donne une barre que l'on casse au hasard en trois morceaux :

1° *Quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle avec ces trois morceaux?*

C'est le problème primitif. La formule (A) donne bien $\frac{1}{4}$.

2° *Quelle est la probabilité pour que l'on puisse former un triangle acutangle avec ces trois morceaux?*

Comme on a

$$S_a = S_b = S_c$$

la probabilité est

$$\frac{\text{surf. } A'B'C' - 3S_c}{\text{surf. } ABC}.$$

S_c est facile à calculer directement; car, si l'on prend CB et CA respectivement pour axe des x et des y , (1) devient

$$xy - a(x + y) + \frac{a^2}{2} = 0$$

et

$$S_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{\frac{a}{2}} y \, dx - \frac{1}{4} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

d'où

$$S_c = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4} - \log 2 \right),$$

et la probabilité est

$$\log 8 - 2 = 0,0794415 \dots$$

Nous allons indiquer une autre méthode pour le problème 1°.

Prenons trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz et construisons le plan dont l'équation est

$$ax + by + cz = 2S,$$

a, b, c, S étant les côtés et la surface du triangle ABC. Ce plan coupe les trois axes respectivement aux points A'', B'', C'' . Les coordonnées d'un point de l'intérieur du triangle $A''B''C''$ représentent les distances d'un point de l'intérieur du triangle ABC aux trois côtés de ce triangle, et à chaque point de $A''B''C''$ ne correspond qu'un point de ABC et réciproquement.

Cela posé, considérons les trois plans

$$x + y = z,$$

$$x - z = y,$$

$$y + z = x,$$

qui passent par les bissectrices des angles des axes; soient A'_1, B'_1, C'_1 les points où les bissectrices de zOy, xOz, yOx coupent $B''C'', A''C'', B''A''$.

Il est facile de voir que, pour tout point situé dans l'intérieur du trièdre $OA'_1B'_1C'_1$, on a

$$x + y < z,$$

$$z + x < y,$$

$$y + z < x.$$

Par suite, pour tout point situé à l'intérieur du triangle $A'_1B'_1C'_1$, on pourra faire un triangle avec les coordonnées de ce point.

La probabilité cherchée d'avoir un triangle avec les trois distances MA_1, MB_1, MC_1 est donc

$$\frac{\text{surface du triangle } A'_1B'_1C'_1}{\text{surface du triangle } A''B''C''} \dots$$

Si l'on remarque maintenant que, pour tous les points intérieurs au cône de révolution $z^2 = x^2 + y^2$, on a

$$z^2 > x^2 + y^2,$$

pour tous ceux intérieurs au cône $y^2 = x^2 + z^2$, on a

$$y^2 > x^2 + z^2;$$

pour tous ceux intérieurs au cône $x^2 = y^2 + z^2$, on a

$$x^2 > y^2 + z^2,$$

que ces trois cônes sont tangents entre eux, deux à deux, le long des arêtes OA'_1, OB'_1, OC'_1 , on voit qu'ils coupent le plan $A''B''C''$, suivant trois coniques tangentes, deux à deux, en A'_1, B'_1, C'_1 et que, pour tout point situé à l'intérieur du triangle curviligne $A'_1B'_1C'_1$ formé par ces trois coniques, on a

$$x^2 < y^2 + z^2,$$

$$y^2 < x^2 + z^2,$$

$$z^2 < x^2 + y^2,$$

c'est-à-dire que le triangle formé avec x, y, z sera acutangle.

La probabilité d'avoir un triangle acutangle avec les trois distances MA_1 , MB_1 , MC_1 est donc

$$\frac{\text{surface du triangle curviligne } A'_1 B'_1 C'_1}{\text{surface du triangle } A'' B'' C''} \dots$$

Au cours de cette étude, j'ai remarqué le théorème suivant, facile à démontrer :

THÉORÈME. — *Dans tout triangle ABC, les quatre bissectrices de deux angles A et B, par exemple, sont tangentes à la parabole qui a AB pour directrice et C pour foyer; les points de contact sont sur la perpendiculaire menée en C au côté qui joint ce point et le sommet d'où part la bissectrice sur laquelle on cherche le point de contact.*

Remarquons que les considérations qui précèdent peuvent constituer une méthode assez générale et qu'on pourrait traiter d'une façon analogue la question suivante :

II.

On a trois quantités liées par la relation $\varphi(x, y, z) = 0$, quelle est la probabilité que, en prenant au hasard les quantités x, y, z , on ait en même temps

$$\psi_1(x, y, z) > 0,$$

$$\psi_2(x, y, z) > 0,$$

$$\psi_3(x, y, z) > 0.$$

En effet, soit A l'aire de la surface $\varphi(x, y, z) = 0$, ou de la portion de cette surface qui convient, dans tous les cas possibles compatibles avec l'énoncé du problème particulier que l'on considère; soit B l'aire de la portion de surface qu'interceptent sur $\varphi(x, y, z) = 0$ les trois surfaces $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, $\psi_3 = 0$, ou la portion de cette aire qui convient à tous les cas favorables.

La probabilité cherchée sera $\frac{A}{B}$.

III.

Un triangle ABC a pour périmètre $2p$; déterminer ses côtés de façon que la probabilité que l'on puisse former un triangle avec les distances à ses trois côtés d'un point de son intérieur pris au hasard soit la plus grande possible.

Nous savons [(voir I, formule (A))] que cette probabilité est

$$\frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Supposons que x soit la valeur cherchée, du côté BC, dans le cas du maximum; on aura

$$b + c = 2p - x,$$

d'où

$$c = 2p - x - b;$$

il faut déterminer b par la condition que

$$\frac{2xb(2p-x-b)}{(x+b)(2p-1)(2p-x)}$$

soit maximum ou

$$\frac{b(2p-x-b)}{2px+b(2p-x-b)},$$

en ne nous occupant pas du facteur constant $\frac{2x}{2p-x}$.

b et $2p-x-b$ sont toujours positifs, ainsi que $2px$; posons donc

$$\begin{aligned} b(2p-x-b) &= X, \\ 2px &= K^2; \end{aligned}$$

il faudra trouver le maximum de

$$\frac{X}{K^2+X}, \quad \text{dont la dérivée} \quad \frac{K^2}{(K^2+X)^2},$$

est toujours positive; la fonction croît donc avec X et il suffit de trouver le maximum de X ou de

$$b(2p-x-b),$$

qui a lieu quand

$$b = 2p - x - b \quad \text{ou} \quad b = \frac{2p-x}{2}$$

et, par suite,

$$c = b = \frac{2p - z}{2}.$$

Si l'on avait considéré la valeur β du côté AC, dans le cas du maximum, on trouverait de même qu'il faut que $BC = AB$, ce qui implique $AB = AC = BC$, c'est-à-dire que le triangle ABC doit être équilatéral. Comme la probabilité est alors $\frac{1}{4}$, on peut remarquer que l'on a ainsi une démonstration de l'inégalité

$$8abc < (a+b)(b+c)(a+c).$$

IV.

Étant donnée une barre RS de longueur L, on la coupe au hasard en trois morceaux x, y, z ; quelle est la probabilité pour que l'on ait

$$ax + by + cz < M^2;$$

a, b, c, M étant des quantités positives données?

x est le morceau contenant le point R et z le morceau contenant le point S.

Sur trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz prenons

$$OA' = \frac{M^2}{a},$$

$$OB' = \frac{M^2}{b},$$

$$OC' = \frac{M^2}{c},$$

et considérons le plan $A'B'C'$ dont l'équation est

$$ax + by + cz = M^2;$$

prenons ensuite

$$Ox = O\beta = O\gamma = L,$$

et considérons le plan $x\beta\gamma$ dont l'équation est

$$x + y + z = L;$$

pour tout point du plan $x\beta\gamma$ à l'intérieur du triangle $x\beta\gamma$, on a

$$x + y + z = L,$$

et les coordonnées de ce point donnent d'une seule façon tous les cas possibles de division de RS. Pour tous les points de l'espace situés du même côté du plan $A'B'C'$ que O, on a

$$ax + by + cz - M^2 < 0;$$

pour tous les points situés de l'autre côté, on a

$$ax + by + cz - M^2 > 0.$$

La probabilité P cherchée est donc le rapport de la partie de l'aire de $\alpha\beta\gamma$ située au-dessous de $A'B'C'$ à l'aire de $\alpha\beta\gamma$.

Nous n'avons maintenant qu'à examiner les huit cas suivants :

$$\begin{array}{ll} (1) \left\{ \begin{array}{l} L > OA', \\ L > OB', \\ L > OC'; \end{array} \right. & (3) \left\{ \begin{array}{l} L > OA', \\ L < OB', \\ L < OC'; \end{array} \right. & (5) \left\{ \begin{array}{l} L > OA', \\ L > OB', \\ L < OC'; \end{array} \right. & (7) \left\{ \begin{array}{l} L > OA', \\ L < OB', \\ L > OC'; \end{array} \right. \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} L < OA', \\ L < OB', \\ L < OC'; \end{array} \right. & (4) \left\{ \begin{array}{l} L < OA', \\ L > OB', \\ L > OC'; \end{array} \right. & (6) \left\{ \begin{array}{l} L < OA', \\ L < OB', \\ L > OC'; \end{array} \right. & (8) \left\{ \begin{array}{l} L < OA', \\ L > OB', \\ L < OC'. \end{array} \right. \end{array}$$

Pour le premier cas, on a $P=0$, puisque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est entièrement au-dessus de $A'B'C'$; pour le deuxième cas, on a $P=1$, puisque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est entièrement au-dessous de $A'B'C'$; pour le troisième cas, $\alpha\gamma$ coupe CA' en N, $\alpha\beta$ coupe AB' en M : la probabilité est

$$\frac{\text{surface de } NM\beta\gamma}{\text{surface de } \alpha\beta\gamma}$$

ou, par un calcul facile : pour (3),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - aL)^2}{L^2(c-a)(b-a)}.$$

Pour les cas (6) et (8) dans lesquels, comme dans le cas (3), deux des longueurs OA' , OB' , OC' sont plus grandes que L, on trouverait : pour (6),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - cL)^2}{L^2(a-c)(b-c)},$$

et pour (8),

$$P = 1 - \frac{(M^2 - bL)^2}{L^2(a-b)(c-b)}.$$

Considérons le cas (4) où deux des longueurs OA' , OB' , OC' sont

plus petites que L ; on aurait facilement pour ce cas

$$P = \frac{(M^2 - aL)^2}{L^2(c-a)(b-a)}.$$

Dans les cas (5) et (7), on aurait, par suite : pour le premier,

$$P = \frac{(M^2 - cL)^2}{L^2(a-c)(b-c)},$$

et pour le second,

$$P = \frac{(M^2 - bL)^2}{L^2(a-b)(c-b)}.$$

V.

On jette dans l'intérieur d'un triangle équilatéral ABC un point M pris au hasard : quelle est la probabilité que le triangle formé avec les droites AM, BM, CM soit acutangle?

Soit a la longueur du côté du triangle.

1° On pourra toujours former un triangle avec AM, BM, CM si M est dans l'intérieur du triangle; car, si l'on circonscrit une circonférence à ABC, les distances d'un point quelconque de la circonférence aux trois sommets sont telles que l'une d'elles est la somme des deux autres et, pour tout point intérieur à cette circonférence, une quelconque de ces distances est plus petite que la somme des deux autres, c'est-à-dire que l'on peut construire un triangle avec elles.

2° Le lieu des points, tels que

$$\overline{CM}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{MB}^2,$$

est une circonférence de rayon a , qui passe en A et en B, et y est tangente aux bissectrices des angles A et B; en prenant les lieux analogues, tels que

$$\overline{BM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{CM}^2 \quad \text{et} \quad \overline{AM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2,$$

on aura trois circonférences tangentes deux à deux en A, B, C et tangentes en ces points aux bissectrices; elles laisseront entre elles un espace formant un triangle curviligne de surface S' , tel que, si M est dans l'intérieur de ce triangle curviligne, le triangle

formé avec les lignes AM, BM, CM n'aura que des angles aigus si M est en dehors de ce triangle curviligne; le triangle formé avec AM, BM, CM sera obtusangle.

La probabilité cherchée est donc $\frac{S'}{S}$, mais on voit facilement que

$$S' = a^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right),$$

d'où

$$P = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3} - 2\pi}{\sqrt{3}} = 4 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 0,3718\dots$$

On résoudrait par des méthodes aussi simples une série de questions comme celles-ci :

On casse une barre RS de longueur L en trois morceaux x (contenant R), y et z (contenant S), quelle est la probabilité pour que a, b, c, M étant des quantités données, on ait

$$ax^2 + by^2 + cz^2 < M^2, \quad \text{cas de } a = b = c.$$

On prend au hasard un point M sur une sphère rapportée à trois axes rectangulaires passant par son centre, quelle est la probabilité que les trois coordonnées de ce point puissent former :

- 1° Un triangle;
- 2° Un triangle acutangle.

On prend au hasard un point dans l'intérieur d'un triangle; par ce point, on mène des parallèles aux trois côtés, parallèles limitées aux côtés du triangle. Soit x, y, z les longueurs de ces parallèles, quelle est la probabilité :

- 1° Que x, y, z puissent former un triangle;
- 2° Que x, y, z puissent former un triangle acutangle;
- 3° Que l'on ait

$$mx + ny + pz \leq T^2,$$

m, n, p, T étant des quantités données.

On coupe au hasard en deux morceaux RT, TS, que j'appelle x et k , une barre RS; puis en deux morceaux TV, VS,

que j'appelle y et z , le morceau $TS=k$; quelle est la probabilité :

- 1° Que l'on puisse former un triangle avec x, y, z ;
- 2° Que l'on puisse former un triangle acutangle avec x, y, z ;
- 3° Que l'on ait

$$ax + by + cz < M^2,$$

a, b, c, M étant des quantités données, etc.?

Je suppose qu'en employant les conventions de la Géométrie à n dimensions, on étendrait cette méthode à un nombre de variables autre que 2 et 3.

Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre; par M. ÉMILE PICARD.

(Séance du 17 novembre 1882.)

1. Étant donnée une relation algébrique du genre p

$$f(x, y) = 0,$$

considérons une intégrale abélienne de première espèce correspondante

$$(1) \quad \int_{x_0}^x \frac{F(x, y)}{f'_y(x, y)} dx;$$

on sait que cette intégrale a en général $2p$ périodes, mais il peut y avoir une réduction et le nombre des périodes peut notamment se réduire à deux. On voit immédiatement dans ce cas que l'équation

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{F(x, y)}{f'_y(x, y)} dx = z - z_0,$$

définit une fonction x de z , qui est racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de z . Soient en effet ω et ω' les périodes de l'intégrale, et désignons par $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique aux mêmes périodes; on aura

$$(2) \quad \lambda(z - z_0) = \lambda \left(\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{F dx}{f'_y} \right);$$

On sait que, dans le cas d'un système abélien, c'est-à-dire quand $q = p$, toute fonction symétrique de $x_1, x_2, \dots, x_q$ est une fonction uniforme de $u_1, u_2, \dots, u_q$. Il n'en est plus ainsi quand q est différent de p , mais nous allons voir que $x_1, x_2, \dots, x_q$ sont encore racines d'équations algébriques dont les coefficients sont fonctions uniformes de $u_1, u_2, \dots, u_q$ avec $2q$ systèmes de périodes; de plus, ces fonctions périodiques pourront s'exprimer à l'aide des fonctions Θ de q variables indépendantes.

2. Rappelons tout d'abord que, entre les périodes des deux intégrales quelconques de première espèce u et v , correspondant à une même relation $f(x, y) = 0$ de genre p , périodes que nous désignerons par

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2p}, \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2p}, \end{aligned}$$

il existe une relation de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=2p} \sum_{k=1}^{k=2p} c_{ik} \omega_i \varepsilon_k = 0;$$

les c représentent des entiers et l'on a de plus

$$c_{ki} = -c_{ik} \quad \text{et} \quad c_{ii} = 0$$

(voir, par exemple, BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, p. 53).

On sait de plus que le déterminant $|c_{ik}|$, qui est manifestement un déterminant gauche, est égal à l'unité.

Supposons maintenant que u et v désignent deux des q intégrales admettant seulement $2q$ systèmes de périodes : on peut exprimer toutes les périodes ω par des expressions linéaires à coefficients entiers de ces $2q$ périodes; désignons ces dernières, afin de ne pas multiplier les notations, par les mêmes lettres ω , aucune confusion n'étant possible,

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2q},$$

et l'on a de même, pour la seconde intégrale, les périodes

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2q}.$$

Entre les ω et les ε existera une relation, et il est clair que cette

relation aura la même forme que plus haut : ce sera

$$\sum_{i=1}^{i=2q} \sum_{k=1}^{k=2q} c_{ik} \omega_i \varepsilon_k = 0,$$

et l'on aura

$$c_{ki} = -c_{ik} \quad \text{et} \quad c_{ii} = 0;$$

seulement le déterminant gauche $|c_{ik}|$ ne sera plus nécessairement égal à l'unité.

Désignons sa valeur par n^2 (le déterminant étant, comme on sait, un carré parfait).

On a donc

$$\Delta = n^2 = \begin{vmatrix} c & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1,2q} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & \dots & c_{2,2q} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & \dots & c_{3,2q} \\ \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ c_{2p,1} & . & . & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Considérons les termes de la première ligne ; soit x_1 leur plus grand commun diviseur.

Nous poserons $\omega'_1 = x_1 \omega_1$ et en même temps $\varepsilon'_1 = x_1 \varepsilon_1$, les autres périodes restant les mêmes ; la relation entre les nouvelles périodes aura toujours des coefficients entiers et le déterminant des coefficients Δ_1 aura pour valeur $\frac{n^2}{x_1^2}$ et dans Δ_1 les éléments de la première ligne et de la première colonne seront premiers entre eux. On peut donc, par une transformation du premier ordre effectuée sur les périodes

$$\begin{aligned} \omega'_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{2q}, \\ \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{2q}, \end{aligned}$$

amener le tableau des coefficients dans la relation entre les périodes à avoir la forme

$$(3) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1,2q-2} \\ 0 & 0 & d_{21} & 0 & d_{23} & \dots & \\ . & . & . & . & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & d_{2q-2,1} & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

ment $x_1, x_2, \dots, x_q$ sont des fonctions algébriques de $F_1, F_2, \dots, F_q$, comme nous voulions l'établir.

La démonstration précédente suppose essentiellement que le déterminant formé avec les c n'est pas nul. Nous allons montrer maintenant que cette circonstance ne peut se présenter; nous nous appuierons sur cette remarque fondamentale due à Riemann, qu'en posant

$$\omega_i = A_i + B_i \sqrt{-1},$$

les ω représentent les $2p$ périodes d'une intégrale quelconque de première espèce.

La somme

$$\sum_{k=1}^{k=2p} \sum_{i=1}^{i=2p} c_{ik} A_i B_k$$

est certainement différente de zéro.

Ceci posé, plaçons-nous d'abord, pour plus de clarté, dans le cas simple où l'on aurait $q = 2$; on a alors le système des périodes pour les intégrales u et v ,

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4. \\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4. \end{aligned}$$

et soit

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

où

$$c_{ik} = -c_{ki}.$$

le déterminant des c .

D'après la remarque précédemment faite, tous les c ne peuvent être nuls. Il peut arriver que tous les termes de la première et de la troisième ligne soient nuls; alors la relation entre les périodes se réduira à

$$\omega_2 \omega_4 - \omega_3 \omega_2 = 0.$$

Si nous laissons ce cas de côté, nous pouvons supposer que tous les termes de la première ligne ne sont pas nuls. Alors, en répétant le raisonnement fait plus haut, par une transformation conve-

on établira que, si le déterminant des c figurant dans la relation

$$\sum_{k=1}^{k=2q} \sum_{i=1}^{i=2q} c_{ik} \omega_{\alpha,i} \omega_{\beta,k} = 0$$

est nul, on peut, par une transformation de degré convenable, remplacer le système des périodes par le suivant :

$$\begin{aligned} & \Omega_{11}, \quad \Omega_{12}, \quad \dots, \quad \Omega_{1,2q}, \\ & \Omega_{21}, \quad \Omega_{22}, \quad \dots, \quad \Omega_{2,2q}, \\ & \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \\ & \Omega_{q,1}, \quad \Omega_{q,2}, \quad \dots, \quad \Omega_{q,2q}, \end{aligned}$$

et entre les périodes correspondant à deux lignes quelconques de rang α et β , on aura

$$\begin{aligned} & \Omega_{\alpha,1} \Omega_{\beta,2} - \Omega_{\alpha,2} \Omega_{\beta,1} + \Omega_{\alpha,3} \Omega_{\beta,4} \\ & - \Omega_{\alpha,4} \Omega_{\beta,3} + \dots + \Omega_{\alpha,2r-1} \Omega_{\beta,2r} - \Omega_{\alpha,2r} \Omega_{\beta,2r-1} = 0, \end{aligned}$$

où r est moindre que q .

De plus, puisque r est moindre que q , on peut, en considérant, au lieu de $u_1, u_2, \dots, u_q$, des combinaisons linéaires de ces intégrales, supposer, en gardant les mêmes notations, que

$$\Omega_{\alpha,1} = 0, \quad \Omega_{\alpha,3} = 0, \quad \dots, \quad \Omega_{\alpha,2r-1} = 0.$$

Mais nous savons que, en posant

$$\Omega_{\alpha i} = A_i + B_i \sqrt{-1},$$

la somme

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 + A_3 B_4 - A_4 B_3 + \dots + A_{2r-1} B_{2r} - A_{2r} B_{2r-1}$$

n'est pas nulle, ce qui nous amène encore à une contradiction, puisque, ici,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = 0, \quad \dots, \quad A_{2r-1} = 0, \quad B_{2r-1} = 0.$$

4. Nous allons nous borner dans ce qui va suivre au cas où la courbe considérée est du second genre, en la prenant immédiatement, comme il est permis; sous la forme

$$(6) \quad y^2 = R(x) = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x).$$

Nous nous proposons de traiter le problème suivant :

Trouver les expressions générales de k^2 , l^2 et m^2 , telles qu'il

existe une intégrale de première espèce correspondant à la courbe précédente, ayant seulement deux périodes.

Admettons donc que l'on puisse trouver un polynôme du premier degré $f(x)$, de manière que l'intégrale

$$\int_{x_0}^x \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}}$$

ait seulement deux périodes.

Désignons par $P(x)$ et $Q(x)$ deux intégrales normales de première espèce correspondant à la relation (6).

On aura comme tableau des périodes de ces intégrales

$$(7) \quad \begin{cases} 1 & 1 & G' & H, \\ 1 & 0 & H & G \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{f(x) dx}{\sqrt{R(x)}} = AP(x) + BQ(x),$$

A et B étant deux constantes convenables. Ses périodes sont donc

$$B, \quad A, \quad AG' + BH, \quad AH - BG,$$

et elles doivent, par hypothèse, se réduire à deux. Par suite, on doit avoir

$$mB + nA + p(AG' + BH) + q'(AH + BG) = 0,$$

$$m'B + n'A + p'(AG' + BH) + q'(AH + BG) = 0,$$

les m, n, p, q étant des entiers, et l'on suppose, bien entendu, que l'on n'a pas

$$\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'}.$$

Ces équations peuvent s'écrire

$$A(n + pG' + qH) + B(m + pH + qG) = 0,$$

$$A(n' + p'G' + q'H) + B(m' + p'H + q'G) = 0,$$

d'où, par suite,

$$(8) \quad \begin{cases} 0 = nm' - mn' + pm' - p'm)G' \\ \quad + (qm' - q'm + np' - n'p)H \\ \quad + (nq' - n'q)G + (qp' - pq')(H^2 - GG'). \end{cases}$$

Telle est donc la relation qui doit exister entre les quantités G, G' et H .

5. Transformons tout d'abord ce premier résultat. Une transformation du premier degré substitue aux intégrales normales $P(x)$ et $Q(x)$ deux nouvelles intégrales pour lesquelles on a le tableau de périodes

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & G'_1 \quad H_1, \\ 1 & 0 & H_1 \quad G_1, \end{array}$$

et l'on a, comme on sait [voir HERMITE, *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1855)],

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\ H_1 &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]H - (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \\ G'_1 &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{03}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')}, \end{aligned}$$

où l'on a posé, d'une manière générale,

$$(ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i.$$

Les a, b, c, d sont des entiers vérifiant les relations

$$(9) \quad \begin{cases} a_0 d_3 + b_0 c_3 - c_0 b_3 - d_0 a_3 = a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 - d_1 a_2 = 1, \\ a_0 d_1 + b_0 c_1 - c_0 b_1 - d_0 a_1 = 0, \\ a_0 d_2 + b_0 c_2 - c_0 b_2 - d_0 a_2 = 0, \\ a_1 d_3 + b_1 c_3 - c_1 b_3 - d_1 a_3 = 0, \\ a_2 d_3 + b_2 c_3 - c_2 b_3 - d_2 a_3 = 0. \end{cases}$$

système qui a fait l'objet des recherches de M. Hermite (voir *loc. cit.*).

Cela posé, nous allons voir que, G, H et G' étant supposés satisfaire à la relation (8), on peut trouver des entiers (a, b, c, d) vérifiant les relations (9) et tels que H_1 soit l'inverse d'un nombre entier D . La relation (8) devra alors être susceptible de prendre la forme

$$\frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [(ad)_{03} + (ad)_{21}]H + (ad)_{02}G' - (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + [(ab)_{03} + (ab)_{21}]H + (ab)_{02}G' - (ab)_{23}(H^2 - GG')} = \frac{1}{D}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} a_0(Dd_1 - b_1) - a_1(Dd_0 - b_0) &= \lambda(nm' - mn'), \\ a_3(Dd_1 - b_1) - a_1(Dd_3 - b_3) &= \lambda(nq' - n'q), \\ a_0(Dd_3 - b_3) - a_3(Dd_0 - b_0) &= \lambda(qm' - q'm), \\ a_2(Dd_1 - b_1) - a_2(Dd_2 - b_2) &= \lambda(np' - n'p), \\ a_0(Dd_2 - b_2) - a_2(Dd_0 - b_0) &= \lambda(pm' - p'm), \\ a_2(Dd_3 - b_3) - a_3(Dd_2 - b_2) &= \lambda(qp' - p'q'), \end{aligned}$$

λ étant un nombre évidemment rationnel.

On déduit de ces équations, à l'aide des relations (6),

$$(9 \text{ bis}) \quad D = \lambda(qm' - mq' + pn' - p'n),$$

et nous supposons d'abord le coefficient de λ différent de zéro.

Les binômes $nm' - mn'$, $nq' - n'q$, $\dots$, $qp' - p'q'$ n'étant pas tous nuls, soit $nm' - mn' \pm 0$.

Les équations précédentes se réduisent alors, en posant

$$Dd_0 - b_0 = \Lambda_0, \quad Dd_1 - b_1 = \Lambda_1, \quad Dd_2 - b_2 = \Lambda_2, \quad Dd_3 - b_3 = \Lambda_3,$$

à

$$\begin{aligned} a_2(nm' - mn') &= a_0(np' - n'p) + a_1(pm' - p'm), \\ a_3(nm' - mn') &= a_0(nq' - n'q) + a_1(qm' - q'm), \\ \Lambda_2(nm' - mn') &= \Lambda_0(np' - n'p) + \Lambda_1(pm' - p'm), \\ \Lambda_3(nm' - mn') &= \Lambda_0(nq' - n'q) + \Lambda_1(qm' - q'm), \\ a_0\Lambda_1 - a_1\Lambda_0 &= \lambda(nm' - mn'); \end{aligned}$$

(10) et les relations (9) se réduiront alors à

$$\begin{aligned} a_0d_3 + a_1d_2 - a_2d_1 - a_3d_0 &= 1, \\ a_0c_3 + a_1c_2 - a_2c_1 - a_3c_0 &= 0, \\ \Lambda_0c_3 + \Lambda_1c_2 - \Lambda_2c_1 - \Lambda_3c_0 &= 1, \\ \Lambda_0d_3 + \Lambda_1d_2 - \Lambda_2d_1 - \Lambda_3d_0 &= 0, \\ c_0d_3 + c_1d_2 - c_2d_1 - c_3d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de rechercher si l'on peut trouver des entiers (a, Λ, c, d) , puis la quantité fractionnaire λ , satisfaisant aux relations (10), et λ étant tel que la valeur de D tirée de l'équation (9 bis) soit entière.

5. Nous simplifierons les calculs en supposant $m' = 0, n = 0$, ce qui ne diminue en rien la généralité, car on peut supposer les

deux relations entre les périodes (n° 3), écrites de telle manière qu'elles ne renferment chacune que trois périodes; de plus on peut considérer m, p, q d'une part, et n', p', q' d'autre part, comme premiers entre eux, et l'on a d'ailleurs m et n' différents de zéro.

Les relations (10), après quelques modifications, vont alors s'écrire

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} n' m a_2 = n' p a_0 + m p' a_1, \quad n' m \Lambda_2 = n' p \Lambda_0 + m p' \Lambda_1 \\ n' m a_3 = n' q a_0 + m q' a_1, \quad n' m \Lambda_3 = n' q \Lambda_0 + m q' \Lambda_1, \\ a_1 = \lambda(-mn'c_3 + n'pc_1 + n'qc_0), \\ a_0 = -\lambda(-mn'c_2 + mp'c_1 + mq'c_0), \\ \Lambda_1 = \lambda(-mn'd_3 + n'qd_0), \\ \Lambda_0 = -\lambda(-mn'd_2 + mp'd_1 + mq'd_0), \\ \lambda[mn'(c_2d_3 - c_3d_2) + mp'(c_3d_1 - c_1d_3) \\ \quad + (mq' + n'p)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ \quad + (pq' - p'q)(c_0d_1 - c_1d_0) + n'q(c_0d_2 - c_2d_0)] = 1, \\ c_0d_3 + c_1d_2 - c_2d_1 - c_3d_0 = 0. \end{array} \right.$$

Nous prendrons $\lambda = \frac{1}{\theta}$, θ désignant le plus grand commun diviseur entre

$$mn', mp', mq' + n'p, pq' - p'q, n'q,$$

et l'on verra bien facilement que θ divise mq' et $n'p$, en se rappelant que m, p, q d'une part, et n', p', q' d'autre part, sont premiers entre eux.

Dans ces conditions, les valeurs de a_1, a_0, Λ_1 et Λ_0 tirées des équations précédentes seront entières, quels que soient les c et les d , et l'on voit sans peine que, a_1, a_0 et Λ_1, Λ_0 étant ainsi choisis, les valeurs de a_2, a_3, Λ_2 et Λ_3 tirées des quatre premières équations (11) sont également entières : on trouve en effet

$$\begin{aligned} a_2 &= \lambda[n'p c_2 - mp' c_3 + (qp' - p'q)c_0], \\ a_3 &= \lambda[n'q c_2 - mq' c_3 + (pq' - p'q)c_1], \end{aligned}$$

et des valeurs analogues pour Λ_2 et Λ_3 .

Et de même la valeur de D tirée de l'équation (9 bis), qui s'écrira

$$D = \lambda(-mq' + pn'),$$

est bien aussi entière.

Nous avons donc simplement à vérifier que l'on peut trouver des entiers c_0, c_1, c_2, c_3 et d_0, d_1, d_2 et d_3 satisfaisant aux deux dernières des équations (11). Ces équations sont

$$\begin{aligned} \alpha(c_2 d_3 - c_3 d_2) + \beta(c_3 d_1 - c_1 d_3) \\ + \gamma(c_1 d_2 - c_2 d_1) + \delta(c_0 d_1 - c_1 d_0) + \varepsilon(c_0 d_2 - c_2 d_0) = 1, \\ c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 = 0, \end{aligned}$$

et les entiers $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ε sont premiers entre eux.

On s'assure aisément que l'on peut trouver des entiers (c, d) vérifiant ces équations (6). Fait-on, par exemple, $d_2 = 0, d_3 = 1, c_3 = 0$, si β et δ ou $\delta, \gamma, \varepsilon$ et α ne sont pas nuls à la fois, les équations deviendront

$$c_0 = c_2 d_1,$$

puis

$$c_2(\delta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha) - c_1(\beta + \delta d_0) = 1 :$$

telle est la seule relation entre c_1, c_2, d_1 et d_0 . Prend-on convenablement d_1 et d_0 ,

$$\beta + \delta d_0 \quad \text{et} \quad \delta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha$$

seront premiers entre eux. Pour le voir bien nettement, remarquons que

$$\beta, \delta, \varepsilon \quad \text{et} \quad \delta d_1^2 - \gamma d_1 + \alpha$$

seront, si d_1 est convenablement pris, premiers entre eux, et l'on peut d'ailleurs évidemment supposer que

$$\delta^2 d_1^2 - \gamma \delta d_1 + \alpha \delta + \beta \varepsilon$$

n'est pas nul, si δ et ε ne sont pas tous deux nuls.

On a donc deux expressions

$$M + N d_0, \quad M_1 + N_1 d_0,$$

où

$$M, N, M_1 \quad \text{et} \quad N_1$$

sont premiers entre eux et $MN_1 - M_1N$ n'étant pas nul, et l'on a alors simplement à vérifier que d_0 peut être pris de manière que ces expressions soient premières entre elles, comme on le voit immédiatement. Si δ et ε sont nuls à la fois, on reconnaît de suite que

$$\beta \quad \text{et} \quad \gamma d_1 - \alpha$$

seront, pour d_1 convenablement choisi, premiers entre eux. Donc, en résumé, on pourra satisfaire à l'équation

$$c_2(\beta d_1^2 - \gamma d_1 - \varepsilon d_0 + \alpha) - c_1(\beta + \delta d_0) = 1,$$

si β et δ ou δ , γ , ε et α ne sont pas nuls à la fois.

Le second de ces cas particuliers se traite immédiatement; que l'on prenne alors, en effet,

$$d_1 = 0, \quad c_1 = 1,$$

on aura les équations

$$\beta d_3 + \delta d_0 = -1,$$

$$c_0 d_3 + d_2 = c_3 d_0,$$

et l'on peut y satisfaire, puisque β et δ sont ici premiers entre eux.

Examinons enfin le cas où β et δ seront nuls à la fois. Nous ferons

$$c_2 = 0, \quad d_2 = 1,$$

et les équations deviendront

$$\gamma c_1 + \varepsilon c_0 - \alpha c_3 = 1,$$

$$c_0 d_3 + c_1 = c_3 d_0;$$

la seconde équation donne c_1 et la première devient alors

$$c_3(\gamma d_0 - \alpha) + c_0(\varepsilon - \gamma d_3) = 1,$$

évidemment résoluble.

7. Dans les calculs précédents (n° 4), nous avons supposé que $nm' - mn'$ était différent de zéro; mais, les binômes $nm' - mn'$, $nq' - n'q$, ..., $qp' - pq'$ n'étant pas tous nuls, on pourra toujours opérer en suivant une voie analogue à celle qui vient d'être indiquée. Il faut maintenant voir quel parti on peut tirer du résultat précédent. Si la valeur de D , donnée par l'équation (9 bis)

$$D = \lambda(qm' - mq' + pn' - p'n),$$

n'est pas nulle, la valeur de H_1 sera la quantité finie $\frac{1}{D}$, et G_1 et G'_1 auront des valeurs finies bien déterminées. Nous aurons alors, dans ce cas, un tableau de périodes intégrales normales

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \begin{array}{c} G'_1 \\ G_1 \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{D} \\ \frac{1}{D} \end{array}$$

mais une circonstance particulière doit nous arrêter maintenant : je veux parler du cas où l'on aurait $D = 0$; les valeurs de G_1 , H_1 et H'_1 seraient infinies et le résultat se présenterait sous une forme illusoire. Nous allons montrer que cette circonstance ne peut se rencontrer, c'est-à-dire que l'on ne peut avoir

$$qm' - mq' + pn' - p'n = 0.$$

La relation entre G , H et G' serait, en effet, dans ce cas (équation 8)

$$(12) \quad \begin{cases} nm' - mn' + (pm' - p'm)G' + 2(qm' - mq')H \\ + (nq' - n'q)G + (qp' - p'q')(H^2 - GG') = 0 \end{cases}$$

avec la condition

$$qm' - mq' = np' - pn',$$

et nous allons voir qu'une pareille relation ne peut exister entre les trois quantités H , G et G' , qui jouissent, comme on sait, de la propriété suivante. On a, en désignant par h , g et g' les coefficients de i dans ces quantités,

$$h^2 - gg' < 0.$$

Considérons d'abord le cas où $p'q - p'q = 0$. On peut alors supposer que $p' = 0$ et $q' = 0$, car les relations entre les périodes (n° 3) peuvent, dans ce cas, être remplacées par deux autres, dont la seconde ne renfermera que A et B . On aura donc

$$nm' - mn' + pm'G' + 2qm'H - n'qG = 0$$

avec la condition

$$qm' = -pn';$$

on aura par suite

$$pm'g' + 2qm'h - n'qg = 0.$$

p et h ne sont évidemment pas nuls à la fois, ni m' et n' . Soit n différent de zéro, on aura, en substituant $p = -\frac{qm}{n'}$ dans la seconde équation,

$$-qm'^2g' + 2qm'n'h - n'^2qg = 0.$$

Or q n'est pas nul, parce que p serait alors nul; on a donc

$$m'^2g' - 2m'n'h - n'^2g = 0,$$

et, comme m' et n' ne sont pas nuls tous deux, il en résulte nécessairement

$$h^2 - gg' > 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

La vérification directe du théorème précédent nous entraînerait dans des calculs pénibles; la voie indirecte que nous allons exposer nous conduira bien plus simplement au résultat. Partons d'un système d'intégrales normales pour lesquelles H , G et G' , satisfaisant d'ailleurs à la relation nécessaire $h^2 - gg' < 0$, vérifient l'équation (12), et l'on suppose d'ailleurs que $pq' - p'q$ est différent de zéro.

Effectuons une transformation correspondant à l'entier positif k . Les coefficients (a, b, c, d) de la transformation satisfont, comme on sait, aux relations (HERMITE, *loc. cit.*)

$$\begin{aligned} a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 - a_3 b_0 &= 0, \\ a_0 c_3 + a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0 &= 0, \\ a_0 d_3 + a_1 d_2 - a_2 d_1 - a_3 d_0 &= k, \\ b_0 c_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - b_3 c_0 &= k, \\ b_0 d_3 + b_1 d_2 - b_2 d_1 - b_3 d_0 &= 0, \\ c_0 d_3 + c_1 d_2 - c_2 d_1 - c_3 d_0 &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons prendre

$$\begin{aligned} b_0 &= m', & b_1 &= n', & b_2 &= p', & b_3 &= q', \\ d_0 &= m, & d_1 &= n, & d_2 &= p, & d_3 &= q; \end{aligned}$$

l'avant-dernière des équations précédentes se réduit à

$$m'q + n'p - np' - mq' = 0,$$

qui est bien effectivement vérifiée.

Soit encore

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0;$$

on aura

$$\begin{aligned} a_0 q' + a_1 p' &= 0, & c_0 q' + c_1 p' &= -k, \\ a_0 q + a_1 p &= k, & c_0 q + c_1 p &= 0. \end{aligned}$$

Prenons k égal à la valeur absolue de $(pq' - p'q)$; il est clair qu'alors les équations précédentes donneront, pour (a_0, a_1, c_0, c_1) , des valeurs entières, et l'on aura alors tous les coefficients (a, b, c, d) d'une transformation de degré k ($k > 0$).

Or, après cette transformation, G , H et G' sont remplacées par G_1 , H_1 et G'_1 , et l'on a

$$G_1 = \frac{(db)_{01} + (db)_{31} G + 2(db)_{03} H + (db)_{02} G' + (db)_{23} (H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31} G + 2(ab)_{03} H + (ab)_{02} G' + (ab)_{23} (H^2 - GG')}.$$

H_1 et G'_1 sont données par des expressions analogues ayant même dénominateur; or le numérateur de G_1 est précisément

$$\begin{aligned} mn' - nm' + (n'q - nq')G + 2(m'q - mq')H \\ + (m'p - mp')G' + (p'q - pq')(H^2 - GG'), \end{aligned}$$

qui est nul d'après l'équation (12). D'ailleurs le dénominateur de G_1 est

$$a_0 n' - a_1 m' - a_1 q' G + 2a_0 q' H + a_0 p' G',$$

qui n'est certainement pas nul; le coefficient de $\sqrt{-1}$ est, en effet,

$$- a_1 q' g + 2a_0 q' h + a_0 p' g';$$

or p' et q' ne sont pas nuls à la fois, puisque $pq' - p'q$ est différent de zéro; a_0 et a_1 sont d'ailleurs proportionnels à p' et à $-q'$, et l'expression précédente est, à un facteur constant près, différente de zéro

$$q'^2 g + 2p'q'h + p'^2 g',$$

et elle n'est pas nulle, puisque $h^2 - gg' < 0$.

Le dénominateur de G_1 n'étant pas nul, on a donc $G_1 = 0$, et H_1 et G'_1 ont des valeurs finies parfaitement déterminées. Or on sait que (HERMITE, *loc. cit.*), après une transformation de degré quelconque k , $h^2 - gg'$ ne change pas de signe; en désignant donc par g_1 , h_1 et g'_1 les coefficients de i dans G_1 , H_1 et G'_1 , on devra avoir

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0,$$

puisque l'on a

$$h^2 - gg' < 0,$$

mais l'inégalité

$$h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$$

est impossible, puisque $g_1 = 0$.

Nous arrivons donc à une contradiction, et il est par suite impossible de supposer, entre G , H et G' , une relation de la forme (14).

8. L'analyse qui vient d'être développée nous permet donc d'énoncer la proposition suivante :

S'il existe une intégrale de première espèce correspondant à la relation algébrique

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$

qui ait seulement deux périodes, on pourra trouver un système d'intégrales normales, dont le tableau des périodes sera

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & G & \frac{1}{D} \\ 1 & 0 & \frac{1}{D} & G' \end{array}$$

où D désigne un entier réel et positif.

Ce théorème donne immédiatement les valeurs de k^2 , l^2 et m^2 . On sait, en effet, que, pour un système d'intégrales dont le tableau des périodes serait

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & G & H \\ 1 & 0 & H & G' \end{array}$$

on a les valeurs de k^2 , l^2 , m^2 données par les formules de Richelot. Soient

$$\left. \begin{array}{cccc} \zeta_5 & \zeta_{12} & \zeta_{34} & \zeta_0 \\ \zeta_{01} & \zeta_{02} & \zeta_2 & \zeta_1 \\ \zeta_4 & \zeta_{03} & \zeta_3 & \zeta_{04} \\ \zeta_{23} & \zeta_{13} & \zeta_{24} & \zeta_{14} \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{cccc} c_5 & c_{12} & c_{34} & c_0 \\ c_{01} & 0 & c_2 & 0 \\ c_4 & c_{03} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 & c_{14} \end{array} \right.$$

les seize fonctions ζ hyperelliptiques de M. Weierstrass et leurs valeurs correspondant aux arguments zéro; on a

$$k^2 = \frac{c_{23}c_4}{c_{01}c_5}, \quad l^2 = \frac{c_{03}c_{23}}{c_{12}c_{01}}, \quad m^2 = \frac{c_{03}c_4}{c_{12}c_5},$$

et les c sont des fonctions uniformes de G , H et G' . Fait-on dans ces formules $H = \frac{1}{D}$, on obtient l'expression générale des modules répondant au problème proposé, en y ajoutant toutefois, bien entendu, ceux qui s'en déduisent par une transformation du premier ordre. Écrivons donc

$$k^2 = F_1\left(G, \frac{1}{D}, G'\right), \quad l^2 = F_2\left(G, \frac{1}{D}, G'\right), \quad m^2 = F_3\left(G, \frac{1}{D}, G'\right).$$

Pour une valeur fixe donnée à l'entier D , k^2 , l^2 et m^2 sont des fonctions de G et G' , et il est aisé d'établir qu'entre ces trois fonctions existe une relation algébrique.

On peut, par exemple, raisonner comme il suit. Tous les modules qui se déduisent de k^2 , l^2 et m^2 par une transformation du premier ordre sont des fonctions algébriques de ces quantités; une fonction symétrique Φ de tous ces modules reste d'ailleurs invariable quand on remplace G , H et G' par G_1 , H_1 et G'_1 (voir n° 4). Or, quand H a la valeur particulière $\frac{1}{D}$, il y a une infinité de ces substitutions qui laissent H invariables, G et G' se transformant linéairement; G , par exemple, étant remplacé par

$$\frac{c_1 + c_2 G}{b_1 + b_2 G},$$

b_1 , b_2 , c_1 , c_2 étant des entiers, tels que

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1,$$

avec les formes suivantes pour b_2 , b_1 et c_2 ,

$$b_2 = mD^2, \quad b_1 = nD - 1, \quad c_2 = pD - 1,$$

où m , n , p sont des entiers.

Trois fonctions symétriques Φ sont donc des fonctions de G et G' se reproduisant pour des groupes de substitutions effectuées séparément sur G et G' , ces groupes rentrant dans la catégorie de ceux que M. Poincaré a appelés *fuchsien*s; elles sont donc liées par une relation algébrique, et il en est de même alors de F_1 , F_2 et F_3 .

Nous avons donc, pour une valeur donnée à l'entier D , la relation algébrique

$$f(k^2, l^2, m^2) = 0.$$

et la réduction à deux périodes peut s'effectuer, pour certaines intégrales, quand k , l et m vérifient cette relation.

Les fonctions Θ de deux variables pour $H = \frac{1}{D}$ peuvent d'ailleurs se ramener aisément aux fonctions Θ d'une seule variable, et c'est en suivant cette voie que l'on devra effectuer le calcul des modules k , l et m .

9. Arrêtons-nous un instant sur un cas particulier. Tout d'a-

bord, pour $D = 1$, on a, comme on le voit immédiatement en se reportant aux expressions de k^2 , l^2 et m^2 ,

$$k^2 = l^2,$$

et ce cas ne correspond pas, à proprement parler, à une intégrale hyperelliptique.

Soit maintenant $D = 2$. A ce cas se rattache l'exemple suivant, où l'on a

$$y^2 = x^6 + ax^4 + bx^2 + c.$$

Tout d'abord, il est évident que les deux intégrales $\int \frac{dx}{y}$ et $\int \frac{x dx}{y}$, se ramenant, en prenant x^2 pour variable, à une intégrale elliptique, n'ont que deux périodes; mais effectuons complètement la réduction pour nous assurer que ce cas correspond à $D = 2$.

Nous pouvons écrire

$$y^2 = (x^2 - a_1^2)(x^2 - a_2^2)(x^2 - a_3^2).$$

Soient M_1, M_2 et M_3 les points a_1, a_2, a_3 et M_4, M_5, M_6 les points symétriques par rapport à l'origine. Nous considérons d'abord l'intégrale

$$\int_{0, y_0}^x \frac{dx}{y},$$

où y_0 est une des déterminations de y pour $x = 0$, et nous désignons par $A_1, A_2, \dots, A_6$ les valeurs de cette intégrale le long de $OM_1, OM_2, \dots, OM_6$.

On a évidemment

$$A_4 = -A_1, \quad A_5 = -A_2, \quad A_6 = -A_3.$$

On peut prendre comme périodes normales de l'intégrale précédente

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2A_1 - 2A_2, & \omega_2 &= 2A_2 - 2A_3, \\ \omega_3 &= 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4, & \omega_4 &= 2A_3 - 2A_5 \end{aligned}$$

(voir BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes*, cas des intégrales hyperelliptiques), qui se réduisent, dans ce cas particulier, à

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2A_1 - 2A_2, & \omega_2 &= 2A_2 - 2A_3, \\ \omega_3 &= 4A_1 - 2A_2 + 2A_3, & \omega_4 &= 2A_2 - 2A_1, \end{aligned}$$

et, en prenant ensuite la seconde intégrale

$$\int_{0, \gamma_0}^x \frac{x dx}{x},$$

les valeurs des intégrales le long de $OM_1, \dots, OM_6$ étant $A'_1, A'_2, \dots, A'_6$, avec les relations évidentes

$$A'_4 = A_1, \quad A'_5 = A_2, \quad A'_6 = A_3,$$

nous avons les périodes

$$\omega'_1 = 2A'_1 - 2A'_2, \quad \omega'_2 = 2A'_2 - 2A'_3, \quad \omega'_3 = -2A'_2 + 2A'_3, \quad \omega'_4 = 2A'_1 - 2A'_2$$

avec la relation entre les périodes

$$-\omega_1 \omega'_2 + \omega_2 \omega'_1 - \omega_3 \omega'_4 + \omega_4 \omega'_3 = 0.$$

Mais on voit que

$$\omega_3 = \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_4 = -\omega_1,$$

en tenant compte de la relation

$$2A_1 - 2A_2 + 2A_3 = 0,$$

et aussi

$$\omega'_3 = -\omega'_2, \quad \omega'_4 = \omega'_1.$$

Nous avons donc le système de périodes

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_2 & -\omega_1 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & -\omega'_2 & \omega'_1 \end{array}$$

que, par une transformation du premier degré, on peut remplacer par

$$\begin{array}{cccc} 0 & \omega_2 & 2\omega_2 & -\omega_1 \\ 2\omega'_1 & -\omega_2 & 0 & \omega'_1 \end{array}$$

ce qui nous donne un système de périodes d'intégrales normales :

$$\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{\omega_1}{2\omega_2} \\ 1 & -\frac{\omega'_2}{2\omega'_1} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}$$

On a par suite $D = 2$, comme nous voulions l'établir.

Remarquons que le cas considéré autrefois par Jacobi, ou

$$y^2 = x(1-x)(1-ax)(1-bx)(1-abx),$$

a et b étant deux constantes quelconques, rentre dans le cas que nous venons d'examiner.

Soient en effet, d'une manière générale, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6 les racines d'un polynôme du sixième degré; on sait qu'on peut remplacer ce polynôme par un polynôme du cinquième degré, soit par exemple le suivant :

$$(1-t)(1-at)(1-bt)(1-ct),$$

en posant

$$a = \frac{(a_2 - a_5)(a_1 - a_3)}{(a_1 - a_5)(a_2 - a_3)}, \quad b = \frac{(a_2 - a_6)(a_1 - a_3)}{(a_1 - a_6)(a_2 - a_3)}, \quad c = \frac{(a_2 - a_4)(a_1 - a_3)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)};$$

or, si le polynôme du sixième degré ne renferme que des puissances paires de la variable, on aura

$$a_2 = -a_1, \quad a_4 = -a_3, \quad a_6 = -a_5,$$

et l'on voit que dans ce cas $c = ab$.

10. Il résulte du théorème énoncé (n° 8) que s'il existe, pour un polynôme donné $R(x)$, une intégrale correspondante n'ayant que deux périodes, il en existera nécessairement une seconde. Dans certains cas particuliers, *il peut arriver qu'il n'y ait pas seulement deux intégrales, mais une infinité* : je vais indiquer un exemple de cette circonstance singulière.

Je considère la courbe du second genre

$$y^3 = x(x-1)(x-a)^2,$$

et soient les deux intégrales de première espèce

$$\omega = \int_{x_0}^x \frac{(x-a)dx}{y^2}, \quad \omega' = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y}.$$

En posant

$$\Omega = (1-\lambda) \int_0^a \frac{(x-a)dx}{y^2}, \quad \Omega' = (1-\lambda) \int_1^a \frac{(x-a)dx}{y^2},$$

$$U = (1-\lambda^2) \int_0^a \frac{dx}{y}, \quad U' = (1-\lambda^2) \int_1^a \frac{dx}{y},$$

où

$$\lambda = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3},$$

on a, pour le tableau des périodes correspondantes de ces intégrales,

$$\begin{array}{cccc} \Omega, & \Omega', & \lambda\Omega, & \lambda\Omega', \\ U, & U', & \lambda^2 U, & \lambda^2 U'; \end{array}$$

on reconnaît d'ailleurs que

$$U = -\lambda^2 \Omega, \quad U' = \Omega'.$$

Ceci posé, A et B étant deux constantes, l'intégrale $A\omega + B\upsilon$ a pour périodes

$$(A - B\lambda^2)\Omega, \quad (A + B)\Omega', \quad (A - B)\lambda\Omega, \quad (A\lambda + B\lambda^2)\Omega'.$$

Si donc il est possible de choisir A et B de manière que

$$\begin{aligned} m(A - B\lambda^2) &= (A - B\lambda), \\ m'(A + B) &= A\lambda + B\lambda^2, \end{aligned}$$

m et m' étant des quantités réelles commensurables, l'expression $A\omega + B\upsilon$ n'aura que deux périodes. Or l'élimination de A et B entre les équations précédentes conduit à l'unique relation

$$mm' - m + 2m' + 1 = 0.$$

L'une de ces quantités, m par exemple, peut être prise arbitrairement et l'on en conclut que l'intégrale de première espèce

$$\int_{x_0}^x \frac{(1 - m\lambda)(x - a) + (1 - m\lambda^2)\gamma}{\lambda^2} dx$$

n'a que deux périodes, m étant une quantité réelle commensurable quelconque.

11. Revenons maintenant au cas général. Pour une valeur donnée à l'entier D et aux constantes G et G' dans les expressions de k^2 , l^2 et m^2 (n° 8), nous savons qu'il existe deux intégrales de première espèce correspondant au polynôme R(x), n'ayant que deux périodes.

Soit l'une d'entre elles

$$u = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{P + Qx}{y} dx,$$

ayant précisément pour périodes 0, 1, G, $\frac{1}{D}$.

Nous voulons étudier maintenant la substitution algébrique qui

transformera l'intégrale précédente en une intégrale elliptique. Établissons à cet effet la proposition suivante :

Soit la fonction Θ de Jacobi obtenue en faisant

$$2K = \frac{1}{D} \quad \text{et} \quad 2iK' = G.$$

L'expression

$$\Theta \left[\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(P + Qx) dx}{y} - z \right],$$

où z désigne une constante arbitraire, est une fonction du point analytique (x, y) qui a D racines.

Supposons que les racines de $R(x)$ se présentent autour du point (x_0, y_0) dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , et figurons par a_6 le point à l'infini (ce sera, si l'on veut, sur la sphère).

Un système de périodes normales de l'intégrale considérée pourra être représenté (voir BRIOT, *Fonctions abéliennes*) par

$$2A_1 - 2A_2, \quad 2A_2 - 2A_3, \quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4, \quad 2A_1 - 2A_5,$$

en désignant par A_i l'intégrale rectiligne prise depuis (x_0, y_0) jusqu'en a_i .

Nous pouvons supposer ici que

$$2A_1 - 2A_2 = 1, \quad 2A_2 - 2A_3 = G, \quad 2A_1 - 2A_2 + 2A_3 - 2A_4 = 0, \quad 2A_1 - 2A_5 = \frac{1}{D}.$$

Faisons dans le plan des coupures en joignant les points $a_1, a_2, \dots, a_6$ au point x_0 .

L'intégrale u sera alors une fonction uniforme du point (x, y) et la restriction apportée par les coupures ne change pas évidemment le nombre des racines. Au point géométrique x correspondent deux points analytiques x, y et $x, -y$ avec les valeurs u et $u' = 2A_1 - u$. Nous avons donc à chercher le nombre des racines du produit

$$\Theta(u - z) \Theta(u' - z).$$

Le nombre des racines sera donné par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int d \log \Theta(u - z) \Theta + \int d \log \Theta(u' - z) \right],$$

l'intégrale étant prise le long du contour dans le sens marqué par les flèches; ou bien, en supposant l'une des intégrations faite

dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse,

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int d \log \Theta(u' - \alpha) - \int d \log \Theta(u - \alpha) \right].$$

Désignons par m' le point variable sur le contour relatif à la première intégrale et par m celui qui est relatif à la seconde, et supposons que ces points marchent de manière à se correspondre de part et d'autre d'une coupure α .

Nous allons calculer

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int d \log \frac{\Theta(u' - \alpha)}{\Theta(u - \alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int d \log H,$$

en posant

$$H = \frac{\Theta(u' - \alpha)}{\Theta(u - \alpha)}.$$

Prenons successivement les lacets.

Nous avons, pour α_1 , $u' = u$, donc $H = 1$, et, par suite, la partie de l'intégrale est nulle.

Pour le lacet α_2 , on a

$$u' - u = 2A_2 - 2A_1 = -1,$$

donc $H = 1$, et l'on a encore zéro dans l'intégrale.

Pour le lacet α_3 ,

$$u' - u = 2A_2 - 2A_3 - (2A_1 - 2A_2) = G - 1,$$

done

$$H = \frac{\Theta(u - \alpha + G - 1)}{\Theta(u - \alpha)} = e^{-2\pi i D(u - \alpha + G)};$$

car on a

$$\Theta\left(u + \frac{1}{D}\right) = \Theta(u) \quad \text{et} \quad \Theta(u + G) = e^{-2\pi i D(u + G)} \Theta(u),$$

done

$$d \log H = -2\pi i D \cdot du,$$

et, en intégrant, on aura

$$-2\pi i D \cdot 2A_3.$$

Pour le lacet α_4 ,

$$u' - u = G,$$

et l'on a, dans l'intégrale,

$$2\pi i D \cdot 2A_4.$$

Pour le lacet a_5 , il vient

$$u' - u = G + \frac{1}{D},$$

et l'on a

$$- 2\pi i D \cdot 2A_5.$$

Il vient enfin, pour le lacet a_6 ,

$$u' - u = G + \frac{1}{D},$$

ce qui donne

$$2\pi i D \cdot 2A_6.$$

Nous avons donc, en faisant la somme,

$$2\pi i D (-2A_3 + 2A_4 - 2A_5 + 2A_6)$$

on, ce qui est la même chose,

$$2\pi i D (2A_1 - 2A_2),$$

c'est-à-dire $2\pi i D$.

Le nombre des racines est, par suite, $\frac{2\pi i D}{2\pi i}$ ou D .

12. Considérons maintenant l'équation

$$(1) \quad \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{(P + Qx) dx}{y} = u;$$

la fonction x de u sera racine d'une équation algébrique dont les coefficients seront des fonctions doublement périodiques de u .

Soit $\text{sn } x$ la fonction elliptique correspondant aux valeurs indiquées précédemment de K et K' et soit A_1 avec la même signification que plus haut; nous venons de montrer que le produit

$$\theta(u) \theta(2A_1 - u)$$

est une fonction du point (x, y) ayant D racines. Or considérons maintenant l'expression

$$\text{sn } u \text{ sn}(2A_1 - u);$$

il est clair qu'elle est une fonction rationnelle de x et y , car elle n'a qu'une valeur pour chaque valeur de ce couple; mais aux deux points analytiques (x, y) et $(x, -y)$ correspond aussi la même valeur, car u et $2A_1 - u$ se permutent simplement. Le pro-

duit précédent est une fonction rationnelle de x , et, d'après le théorème précédent, le numérateur et le dénominateur de cette fraction rationnelle seront des polynômes de degré D . La fonction x de u , définie par l'équation (1), sera donc donnée par une équation de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(2A_1 - u),$$

f et F étant des polynômes de degré D .

On voit, par suite, que l'entier D n'est autre chose que le degré de l'équation algébrique donnant x en fonction de u .

13. On peut faire servir la relation précédente elle-même à la détermination des coefficients de la fraction rationnelle $\frac{f}{F}$. Remarquons tout d'abord que P et Q peuvent être considérés comme connus. Dans le cas général, P et Q sont en effet exprimés par des fonctions uniformes de G , H et G' , comme on le voit, dans le Mémoire couronné de Rosenhain (*Savants étrangers*, 1851); il suffira de faire $H = \frac{1}{D}$. D'ailleurs, le module et le multiplicateur de la fonction $\operatorname{sn} x$, correspondant aux valeurs indiquées de K et de K' , s'exprimeront aussi à l'aide de G par des expressions bien connues.

Or nous pouvons encore, pour simplifier, supposer que (x_0, y_0) coïncide avec $(0, 0)$, et c'est alors l'expression

$$\operatorname{sn}^2 \left[\int_0^x \frac{(P + Qx) dx}{x'} \right]$$

qui est une fonction rationnelle de x , dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré D . On développera cette expression suivant les puissances croissantes de x . Entre $D+1$ coefficients de ce développement, à partir du second, devra exister une relation récurrente dont on trouvera évidemment les coefficients par des équations du premier degré. La connaissance de cette relation entraînera celle du polynôme $F(x)$, et la méthode des coefficients indéterminés donnera de même, uniquement par des équations du premier degré, les coefficients du polynôme $f(x)$. Le problème se trouvera alors complètement résolu, et d'une ma-

nière explicite, car la transformation

$$\frac{f(x)}{F(x)} = z$$

transformera l'intégrale hyperelliptique en une intégrale elliptique. Ajoutons, en terminant, que dans un de ses Mémoires du *Journal de Crelle* et récemment dans son Ouvrage sur la théorie des équations différentielles (Leipzig, 1882), M. Kœnigsberger a donné de nombreux et intéressants exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques et s'est proposé de généraliser le problème de la transformation de Jacobi. On vient de voir que le degré de cette transformation, quand elle est possible, n'est autre que l'entier D qui figure dans les expressions générales que nous avons données de k^2 , l^2 et m^2 .

Sur une propriété relative à deux systèmes matériels, composés d'un même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune; par M. FURET.

(Séance du 1^{er} décembre 1882.)

1. Imaginons dans l'espace deux systèmes, composés chacun de n points et comprenant : l'un les points $A_1, A_2, \dots, A_n$, l'autre les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Supposons, en outre, que les points correspondants des deux systèmes soient doués de la même masse, et désignons les masses respectives des n points de chaque système par $m_1, m_2, \dots, m_n$ (¹). Rapportons séparément les deux groupes de points à deux systèmes d'axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz et $O'x', O'y', O'z'$, parallèles entre eux et ayant pour origines respectives les centres de gravité des deux systèmes.

Soient, d'une manière générale, x_i, y_i, z_i les coordonnées, par rapport à Ox, Oy, Oz , du point A_i ; x'_i, y'_i, z'_i les coordonnées,

(¹) Dans ce qui va suivre, et tant que nous resterons sur le terrain de la Géométrie, nous pourrions, pour plus de généralité, supposer que $m_1, m_2, \dots, m_n$ soient des coefficients, les uns positifs, les autres négatifs; mais leur somme sera toujours supposée différente de zéro.

par rapport à $O'x', O'y', O'z'$ du point A'_i . Soient enfin, par rapport à un troisième système d'axes $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$, respectivement parallèles à ceux des deux premiers, a, b, c les coordonnées du point O ; a', b', c' les coordonnées du point O' .

Les coordonnées respectives des points A_i et A'_i , par rapport au système $(\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta)$, sont évidemment $a + x_i, b + y_i, c + z_i, a' + x'_i, b' + y'_i, c' + z'_i$, et l'on a par suite

$$A_i A_i'^2 = (a + x_i - a' - x'_i)^2 + (b + y_i - b' - y'_i)^2 + (c + z_i - c' - z'_i)^2,$$

ce qui peut s'écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{A_i A_i'}^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 + (x_i - x'_i)^2 \\ \quad + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2 + 2(a - a')x_i + 2(b - b')y'_i \\ \quad + 2(c - c')z_i - 2(a - a')x'_i - 2(b - b')y'_i - 2(c - c')z'_i. \end{array} \right.$$

Mais on a

$$(2) \quad (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 = \overline{OO'}^2,$$

$$(3) \quad (x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_i)^2 = \overline{B_i B_i'}^2,$$

en désignant par B_i et B'_i ce que deviennent respectivement les deux points A_i, A'_i , lorsqu'on transporte les deux systèmes $(A_1, A_2, \dots, A_n), (A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$ parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire coïncider leurs centres de gravité.

On a d'ailleurs, puisque les points O et O' sont les centres de gravité respectifs des deux systèmes,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m_i x_i = 0, \quad \Sigma m_i y_i = 0, \quad \Sigma m_i z_i = 0; \\ \Sigma m_i x'_i = 0, \quad \Sigma m_i y'_i = 0, \quad \Sigma m_i z'_i = 0. \end{array} \right.$$

En tenant compte des relations (2), (3) et (4), ajoutons membre à membre les n relations, déduites de (1), en faisant i successivement égal à 1, 2, ..., n , après en avoir multiplié les deux membres respectivement par $m_1, m_2, \dots, m_n$; nous obtenons

$$(5) \quad \Sigma m_i \overline{A_i A_i'}^2 = M \cdot \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{B_i B_i'}^2,$$

M n'étant autre chose que Σm_i , c'est-à-dire la masse totale de chaque système.

Ce résultat, qui nous a paru nouveau, peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux systèmes matériels composés d'un même nombre de points ayant chacun à chacun les mêmes masses, la somme des produits obtenus en multipliant le carré de la distance de deux points homologues des deux systèmes par la masse commune de ces points est égale au produit obtenu en multipliant le carré de la distance des centres de gravité des deux systèmes par la masse commune de ces systèmes, augmentée de la somme des produits obtenus en multipliant par la masse commune de deux points homologues le carré de la nouvelle distance de ces deux points, après que les deux systèmes ont été transportés parallèlement à eux-mêmes, de manière à faire coïncider leurs centres de gravité.*

De ce théorème résulte immédiatement le corollaire suivant :

Étant donnés deux systèmes matériels composés d'un même nombre de points ayant chacun à chacun les mêmes masses, la somme des produits obtenus en multipliant le carré de la distance de deux points homologues des deux systèmes par la masse commune de ces points reste constante : 1° lorsque ces deux systèmes se déplacent parallèlement à eux-mêmes l'un par rapport à l'autre, de manière que la distance de leurs centres de gravité reste invariable; 2° lorsque ces deux systèmes tournent d'un même angle et dans le même sens autour d'axes parallèles passant par leurs centres de gravité respectifs.

2. Du théorème très général que nous avons démontré plus haut, il est facile de déduire d'autres théorèmes, bien connus d'ailleurs, qui sont d'un usage fréquent en Mécanique.

On peut supposer que deux ou plusieurs points de l'un quelconque des systèmes viennent à coïncider : le théorème subsiste, pourvu qu'au point unique résultant de cette coïncidence se trouvent concentrées les masses des divers points superposés.

Si, en particulier, on suppose que les n points du système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ viennent à coïncider en O' , centre de gravité de ce système, la distance $A_i A'_i$ devient $O' A_i$, $B_i B'_i$ devient égale

à OA_i , et la relation (5) peut s'écrire

$$(6) \quad \Sigma m_i \overline{O'A_i}^2 = M \cdot \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2.$$

On retrouve ainsi le théorème suivant, que l'on rencontre souvent dans les Traités de Géométrie ou de Mécanique :

Étant donné un système de points matériels, la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance à un point fixe donné est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance au centre de gravité du système, augmentée du produit de la masse totale du système par le carré de la distance de son centre de gravité au point fixe donné.

3. Considérons maintenant un système de points matériels $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et un axe quelconque (D) . Sur cet axe, projetons orthogonalement les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ respectivement en $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. On sait que le centre de gravité O du système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ se projette sur (D) au centre de gravité O' du système $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$, à condition que chacun des points du second système soit considéré comme ayant la même masse que le point du premier dont il est la projection. Il résulte de là que la relation 5) s'applique aux deux systèmes ainsi définis. Mais, dans le cas considéré, $\Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2$ a une signification bien connue : c'est le moment d'inertie du système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ par rapport à (D) . Pareillement, $\Sigma m_i \overline{B_i B'_i}^2$ n'est autre chose que le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (D) transporté parallèlement à lui-même au centre de gravité O .

On retrouve ainsi cette propriété fondamentale des moments d'inertie, consistant en ce que *le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie du même système par rapport à un axe parallèle au premier et passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale du système par le carré de la distance des deux axes.*

4. Nous venons de déduire de notre théorème général deux

théorèmes qui concernent : l'un le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe, et l'autre ce qu'on pourrait appeler le moment d'inertie d'un système par rapport à un point. Nous allons, d'une manière semblable, établir un troisième théorème relatif à ce qu'on pourrait appeler le moment d'inertie d'un système de points matériels par rapport à un plan.

A cet effet, considérons un système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et un plan quelconque (P). Soient $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ les projections sur le plan (P) des points $A_1, A_2, \dots, A_n$. On sait que le centre de gravité O du système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ a pour projection sur le plan (P) le centre de gravité O' du système $(A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$, chacun des points du second système étant considéré comme ayant même masse que le point du premier dont il est la projection. La relation (5) est par suite applicable aux deux systèmes considérés, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donné un système de points matériels, la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance ⁽¹⁾ à un plan fixe donné est égale à la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point par le carré de sa distance à un plan parallèle au plan donné et passant par le centre de gravité du système, augmentée du produit de la masse totale du système par le carré de la distance de son centre de gravité au plan donné.

§. Le théorème démontré au commencement de cette Note conduit encore très simplement à un théorème bien connu sur la force vive d'un système matériel.

Supposons que $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$ représentent, en grandeur, direction et sens, les déplacements linéaires simultanés des divers points $A_1, A_2, \dots, A_n$ d'un système matériel. Il est clair que OO' représente en grandeur, direction et sens, le déplacement correspondant du centre de gravité du système.

Nous pouvons appliquer la relation (5) aux deux systèmes $(A_1, A_2, \dots, A_n), (A'_1, A'_2, \dots, A'_n)$. Mais les segments, tels que $B_i B'_i$, ont alors une signification très simple; ils sont égaux aux

⁽¹⁾ Les distances dont il est ici question peuvent être, pour plus de généralité, comptées parallèlement à une même direction fixe quelconque.

déplacements subis, dans l'intervalle de temps considéré, par les points du système $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, *relativement* à un système de comparaison animé d'un mouvement de translation identique au mouvement du centre de gravité O. En divisant les déplacements simultanés par l'élément de temps, supposé infiniment petit, pendant lequel ils s'effectuent, on conclut de (5) la relation

$$(7) \quad \Sigma m_i v_i^2 = MV^2 + \Sigma m_i u_i^2,$$

dans laquelle v_i est la vitesse absolue de A_i , u_i la vitesse relative du même point par rapport au système de comparaison défini plus haut, et V la vitesse du centre de gravité du système.

Ainsi se trouve démontré le théorème suivant qui joue, comme on le sait, un rôle important en Mécanique :

A un instant quelconque, la somme des forces vives d'un système matériel est égale à celle qu'aurait sa masse entière condensée en son centre de gravité, augmentée de la somme des forces vives du système dans son mouvement relatif par rapport à ce centre de gravité.

6. Revenons maintenant à la Géométrie. En remarquant que l'on a, dans la figure définie au début de cette Note,

$$\overline{B_i B_i'}^2 = \overline{OA_i}^2 + \overline{O'A_i'}^2 - 2 \cdot \overline{OA_i} \cdot \overline{O'A_i'} \cdot \cos(\angle OA_i, \angle O'A_i'),$$

on peut écrire la relation (5) de la manière suivante :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m_i \overline{A_i A_i'}^2 = M \cdot \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 \\ \quad + \Sigma m_i \overline{O'A_i'}^2 - 2 \Sigma m_i \overline{OA_i} \cdot \overline{O'A_i'} \cos(\angle OA_i, \angle O'A_i'). \end{array} \right.$$

Si l'on suppose que les points des deux systèmes soient situés respectivement sur deux droites (D) et (D'), la dernière relation devient

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m_i \overline{A_i A_i'}^2 = M \cdot \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 \\ \quad + \Sigma m_i \overline{O'A_i'}^2 - 2 (\Sigma m_i \overline{OA_i} \cdot \overline{O'A_i'}) \cos(\angle D, \angle D'); \end{array} \right.$$

et, dans le cas où les droites (D) et (D') sont rectangulaires, elle se réduit à

$$(10) \quad \Sigma m_i \overline{A_i A_i'}^2 = M \cdot \overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 + \Sigma m_i \overline{O'A_i'}^2.$$

En variant et particularisant les données, on déduirait facilement de ces relations divers théorèmes de Géométrie que nous n'énoncerons pas ici. Nous nous contenterons d'en conclure, comme exemple, une propriété connue du quadrilatère.

Soit $abcd$ un quadrilatère quelconque, plan ou gauche. Désignons par θ l'angle des deux directions ab et cd , et considérons deux systèmes matériels composés l'un des points a et b , l'autre des points c et d correspondant respectivement à a et à b . Si l'on suppose les masses des quatre points égales à l'unité, les centres de gravité des deux systèmes seront les points milieux p et q de ab et de cd , et, en appliquant la relation (9), on aura

$$(11) \quad \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 = 2\overline{pq}^2 + 2\overline{pa}^2 + 2\overline{qc}^2 - 4pa.qc \cos \theta.$$

Associions maintenant respectivement les points a et b du premier système aux points d et c du second; nous aurons, en appliquant de nouveau la relation (9), et observant que les directions ab et dc font entre elles l'angle $\pi - \theta$:

$$(12) \quad \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 = 2\overline{pq}^2 + 2\overline{pa}^2 + 2\overline{qc}^2 + 4pa.qc \cos \theta.$$

En ajoutant membre à membre les relations (11) et (12), nous obtenons la relation bien connue

$$\overline{ac}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 + \overline{bd}^2 = 4\overline{pq}^2 + \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2.$$

Problema duplex Calendarii fundamentale;

Par M. CH. ZELLER.

(Séance du 16 mars 1883.)

PROBLEMA I. — *Ex dato die, mense, anno, sæculo invenire feriam sive diem septimane appertinentem.*

Sit

l numerus sæcularis;

e residuum ejus ex divisione per 4;

k annus intra sæculum;

m numerus mensis;

q » diei.

In divisione $\frac{k}{4}, \frac{26}{10}, \dots$ fractiones omittantur, retentis solis numeris integris ex divisione oriundis.

Regula. — Colligatur summa :

1° Pro calendario Gregoriano.. $q \div \frac{(m+1)26}{10} + k + \frac{k}{4} - 2e$ (vel $+ 5e$),

2° » Juliano $q \div \frac{(m+1)26}{10} + k + \frac{k}{4} - (1 + 2)$;

dividatur per 7, residuum par erit numero diei hebdomadis quæsito.

Menses januarius et februius anno præcedenti adscribendi atque ut tertius et quartus decimus hujus mensis inducendi sunt.

Si in summatione, id quod licet, multipla numeri 7 rejiciuntur, calculus est faciliori negotio et sine calamo perficietur.

Terminus primus q cum unoquoque die, alter mense, tertius anno, quartus cum anno bissextili, quintus cum quovis sæculo variatur.

Exemplum. — 12 oct. 1492 (orbis novi detectio) :

$$\begin{aligned} I &= 14, \quad k = 92, \quad \frac{k}{4} = 23, \quad m = 10, \quad q = 12, \\ 12 + (10 + 1) \times 2, 6 + 92 + 23 - (14 + 2) \\ &= 12 \div 28 \div 92 \div 23 - 16 = 139 = 7 \cdot 19 + 6 : \end{aligned}$$

incidit ergo dies ille ferià sextà, vel die Veneris.

PROBLEMA II. — *Calculus paschalis.*

(a) pro Calendario Juliano :

Regula. — 1° $k + 51$ dividatur per 19, residuum sit a ;

2° $19a + 15$ dividatur per 30, residuum b .

Numerus b præbet terminum paschalem indicans quotà die post 21 martii plenilunium paschale incidat ;

3° Addendo ad b numerum $k + \frac{k}{4} - 1$ et dividendo per 7, habas residuum d ; tùm Pascha erit $b + 7 - d$ diebus post 21 martii; vel $7 - d$ die post plenilunium.

(b) Pro Calendario Gregoriano :

Regula. — 1° $k + 51$ dividas per 19, residuum a .

2° Ad $19a + 15$ addas numerum $h = 1 - \frac{1}{4} - \frac{81+13}{25}$ qui numerus per complura sæcula non mutatur et 7, 8, 9, valet pro annis intrà 1583-1700, 1700-1900, 1900-2200; summam dividendo per 30 habebis residuum b , numerum plenilunii.

3° Ad b adde $k + \frac{k}{4} + 2 - 2e$; divide per 7, restat d ; tum Pascha incidet $(b + 7 - d)$ die post 21 martii, vel $(7 - d)$ die post plenilunium.

Si in 3° summa dividenda multipulum est ipsius 7, ponatur $d=0$, excepto eo casu : cum item $b = 29$ aut $b = 28$ et simul $a > 10$, quo casu $d = 7$ sumendum est. Casus posterior incidet anno 1954.

Exemplum. — Pascha anni 1886 :

$$1 = 18 = 4.4 + 2, \quad e = 2, \quad k = 86, \quad \frac{k}{4} = 21, \quad 86 + 5.18 = 176 = 19.9 + 5,$$

$$a = 5, \quad 19.5 + 15 + 8 = 118 = 30.3 + 28,$$

$$b = 28, \quad 28 + 86 + 21 + 2 - 2.2 = 133 = 7.19 + 0, \quad d = 0.$$

(quia simul $a < 10$).

Pascha incidet

$$28 + 7 - 0 = 35^\circ \text{ die post 21 martii} = 56 \text{ martii} = 25 \text{ aprilis.}$$

Sur les cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré; par M. PERRIN.

(Séance du 15 décembre 1882.)

1. Dans une Note insérée au *Bulletin* (t. X, n° 3, p. 139), j'ai montré que, lorsque les coefficients de l'équation du cinquième degré privée de second terme

$$(1) \quad x^5 + 10px^3 + 10qx^2 + 5rx + s = 0$$

satisfont aux deux conditions

$$q = 0, \quad r = 4p^2,$$

les cinq racines de l'équation ont pour expression

$$\begin{aligned} a + b, \\ \theta a + \theta^4 b, \\ \theta^2 a + \theta^3 b, \\ \theta^3 a + \theta^2 b, \\ \theta^4 a + \theta b, \end{aligned}$$

θ étant une racine cinquième imaginaire de l'unité, et a et b ayant respectivement pour valeurs

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}(-s + \sqrt{s^2 + 128p^5})}, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}(-s - \sqrt{s^2 + 128p^5})},$$

où l'on peut remarquer que $s^2 + 128p^5$ est la racine carrée du discriminant : ce qui complète l'analogie de cette formule de résolution avec la formule de Cardan pour l'équation du troisième degré.

2. Il existe un autre cas où les racines de l'équation (1) s'expriment encore au moyen de deux radicaux cinquièmes seulement. Supposons qu'on ait d'une manière générale

$$(2) \quad x_p = \theta^p a + \theta^{2p} b,$$

p devant recevoir les cinq valeurs successives 1, 2, 3, 4, 5, de telle sorte que x_p représente successivement les cinq racines de l'équation (1). Élevons à la puissance m les deux membres de l'équation (2) :

$$\begin{aligned} (x_p)^m &= \theta^{mp} a^m + m \theta^{(m+1)p} a^{m-1} b + \dots \\ &+ \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k} \theta^{(m+k)p} a^{m-k} b^k + \dots + \theta^{2mp} b^m. \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les cinq équations semblables correspondant aux cinq racines. Nous obtiendrons dans le premier membre la somme Σx^m des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des cinq racines ; dans le second, il ne subsistera que les termes dans lesquels l'exposant de θ est égal à p multiplié par un multiple de 5 ; chacun de ces termes se trouvera d'ailleurs multiplié par 5. On aura ainsi, en

faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, 5,$

$$\Sigma x = 0,$$

$$\Sigma x^2 = 0,$$

$$\Sigma x^3 = 15ab^2,$$

$$\Sigma x^4 = 20a^3b,$$

$$\Sigma x^5 = 5(a^5 + b^5).$$

Comparant ces valeurs des sommes de puissances semblables des racines à celles que donnent les formules de Newton en fonction des coefficients de l'équation, il vient

$$p = 0,$$

$$2q = -ab^2,$$

$$r = -a^3b,$$

$$s = -(a^5 + b^5),$$

ce qui donne

$$a^5 = -\frac{r^2}{2q}, \quad b^5 = \frac{8q^3}{r},$$

avec l'équation de condition

$$(3) \quad 16q^4 + 2qrs - r^3 = 0,$$

Si donc l'équation (1) est de la forme

$$x^5 + 10qx^2 + 5rx + s = 0,$$

et si les coefficients q, r, s satisfont à la relation (3), les cinq racines de l'équation seront données par la formule

$$(4) \quad x_p = -\theta^p \sqrt[3]{\frac{r^2}{2q}} + \theta^{2p} \sqrt[5]{\frac{8q^3}{r}} \quad (p = 1, 2, 3, 4, 5),$$

où θ est une même racine cinquième imaginaire de l'unité, quelconque d'ailleurs, et où les radicaux sont pris avec leurs valeurs arithmétiques.

3. Les deux formes $\theta^p a + \theta^{-p} b$ et $\theta^p a + \theta^{2p} b$, qui viennent d'être considérées successivement comme expressions de la racine x_p de l'équation du cinquième degré, sont des cas particuliers de la forme générale

$$(5) \quad x_p = \theta^p a + \theta^{2p} b + \theta^{3p} c + \theta^{4p} d.$$

à laquelle on sait que doit pouvoir se ramener l'expression de la racine de toute équation du cinquième degré privée de second terme et résoluble par radicaux; a^5, b^5, c^5, d^5 étant d'ailleurs racines d'une équation du quatrième degré dont les coefficients doivent être des fonctions rationnelles des coefficients de la proposée.

D'autre part, Lagrange a montré que, pour l'équation générale du cinquième degré, les coefficients de la résolvante du quatrième degré, qui donneraient a^5, b^5, c^5, d^5 , dépendent d'une seule équation du sixième degré; il semble donc que toutes les fois qu'une équation du cinquième degré est résoluble par radicaux, l'équation correspondante de Lagrange du sixième degré doive avoir au moins une racine rationnelle; et il serait intéressant de pouvoir la former explicitement. Malheureusement la méthode de Lagrange conduit à des calculs à peu près impraticables, et il ne paraît pas que ces calculs aient jamais été poursuivis jusqu'au bout : les géomètres qui se sont occupés de cette question ont préféré se donner *a priori* des fonctions des racines choisies de manière à n'avoir que six valeurs distinctes, et à se prêter au calcul direct des coefficients de l'équation du sixième degré dont elles dépendent; c'est ainsi que M. Hermite a considéré la fonction

$$(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_4)^2(x_4 - x_5)^2(x_5 - x_1)^2 \\ + (x_1 - x_3)^2(x_3 - x_5)^2(x_5 - x_2)^2(x_2 - x_4)^2(x_4 - x_1)^2,$$

dont les six déterminations sont racines d'une équation ayant pour coefficients des invariants de la forme du cinquième ordre. Une autre réduite du sixième degré, calculée par M. Cayley, est celle dont les racines sont les six déterminations de l'expression

$$(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - (x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1),$$

mais cette réduite, de forme plus simple que la précédente, ne possède pas le même caractère d'invariance des coefficients.

En appliquant à la forme générale (5) exactement le même procédé de calcul employé ci-dessus pour le cas particulier de la forme (2), j'ai été conduit à une nouvelle réduite du sixième ordre, d'une simplicité remarquable. Les calculs, bien que ne présentant aucune difficulté, sont trop longs pour être développés ici, ainsi que les conséquences intéressantes qui se déduisent du résultat obtenu, et je me propose d'en faire l'objet d'un travail spé-

cial. Je crois cependant devoir donner immédiatement la forme de la réduite et l'énoncé du principal théorème qui s'y rattache. Voici cet énoncé :

Soient U la forme générale binaire du cinquième ordre; T son covariant canonique (covariant du troisième ordre, du troisième degré par rapport aux coefficients de U , et dont les trois facteurs permettent de transformer U en une somme de trois cinquièmes puissances); P son covariant linéaire le plus simple (du cinquième degré par rapport aux coefficients de U); posons

$$25T^2 - UP = 0.$$

Cette équation du sixième ordre par rapport aux variables et du sixième degré par rapport aux coefficients est la réduite dont il s'agit. Si l'on peut, par un moyen quelconque, déterminer l'une des racines $\frac{x}{y}$ de cette équation ou, ce qui revient au même, l'un des facteurs du covariant $25T^2 - UP$, il suffira de résoudre ensuite deux équations successives du second degré pour obtenir les quatre quantités a^5, b^5, c^5, d^5 , et par suite l'expression des cinq racines de l'équation $U = 0$, sous la forme (5), à condition d'y ajouter le terme constant provenant du second coefficient de U , lorsqu'on ne l'a pas fait préalablement disparaître.

Sur certains développements en série de puissances :

Par M. APPELL.

(Séance du 18 février 1883).

Les développements en série dont je me suis occupé (*Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 118, et *Acta mathematica*, t. I, p. 145) conduisent aux remarques suivantes :

I. Soient deux cercles C et C' qui ne sont pas entièrement intérieurs l'un à l'autre. Alors toute fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points du plan extérieurs à la fois aux deux cercles, est.

en ces points, représentée par une série de la forme

$$(1) \quad f(x) = A_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{A_\nu}{(x-a)^\nu} + \frac{A'_\nu}{(x-a')^\nu} \right].$$

a et a' désignant les affixes des centres des deux cercles. Cela posé :

1^o Si les deux cercles n'ont aucun point commun, ce développement (1) n'est possible que d'une manière; les coefficients A_ν et A'_ν sont déterminés par les formules

$$2\pi i A_\nu = \int_C f(x)(x-a)^{\nu-1} dx, \quad 2\pi i A'_\nu = \int_{C'} f(x)(x-a')^{\nu-1} dx.$$

2^o Si les deux cercles se coupent ou seulement se touchent, le développement (1) est possible d'une infinité de manières; en d'autres termes, on peut former une infinité de séries de la forme (1) ayant pour somme zéro. Il suffit pour cela de prendre une fonction $\varphi(x)$ holomorphe en tous les points non communs aux deux cercles; cette fonction $\varphi(x)$ sera, à l'extérieur de C , développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{(x-a)^\nu};$$

à l'extérieur de C' , cette même fonction sera développable en une série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu}; \quad B'_0 = B_0 = \varphi(\infty);$$

la différence de ces deux séries

$$S(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\frac{B_\nu}{(x-a)^\nu} - \frac{B'_\nu}{(x-a')^\nu} \right]$$

est une série convergente en dehors des deux cercles C et C' et ayant pour somme zéro. On peut donc ajouter cette série $S(x)$ au développement (1) sans que ce développement cesse de représenter $f(x)$.

Mais on peut préciser davantage l'indétermination du développement (1) et montrer que, dans ce développement, les coefficients $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\nu, \dots$ peuvent être pris *arbitrairement* pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre déterminé $n + 1$, si grand soit-il. Pour mettre ce fait en évidence, considérons la série $S'(x)$ obtenue en prenant les dérivées des termes de la série $S(x)$

$$S'(x) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{-\nu B_\nu}{(x-a)^{\nu+1}} + \frac{\nu B_\nu}{(x-a')^{\nu+1}} \right];$$

cette série est aussi convergente en dehors des cercles C et C' , et elle a aussi *pour somme zéro*. D'une façon générale désignons par $S^{(k)}(x)$ la série formée par les dérivées d'ordre k des termes de la série $S(x)$: cette série sera convergente aux mêmes points que $S(x)$ et aura *pour somme zéro*. Nous pouvons de plus supposer que, dans $S(x)$, le coefficient B_1 est différent de zéro; par exemple, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(x)$ qui a servi à former $S(x)$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-a},$$

a étant un point commun aux deux cercles; alors $B_1 = 1$.

Cela posé, nous pouvons, sans changer la somme de la série (1), lui ajouter le développement

$$\lambda_0 S(x) + \lambda_1 S'(x) + \dots + \lambda_{n-1} S^{(n-1)}(x),$$

dont la somme est nulle; mais on pourra déterminer les paramètres

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$$

de façon que, dans la nouvelle série

$$f(x) + \lambda_0 S(x) + \lambda_1 S'(x) + \dots + \lambda_{n-1} S^{(n-1)}(x),$$

les coefficients de

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{(x-a)^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{(x-a)^n}$$

prennent des valeurs données d'avance. Donc ces coefficients peuvent être pris arbitrairement, comme nous l'avons annoncé.

Les coefficients de $\frac{1}{x-a'}$, $\frac{1}{(x-a')^2}$, ..., $\frac{1}{(x-a')^n}$ sont alors déterminés par les formules suivantes dans lesquelles l'indice CC' indique que les intégrales qui en sont affectées sont prises sur une courbe fermée enveloppant les deux cercles C et C'.

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= f(x), \\ \int_{CC'} f(x) dx &= 2\pi i (\Lambda_1 + \Lambda'_1), \\ \int_{CC'} x f(x) dx &= 2\pi i (a\Lambda_1 + a'\Lambda'_1 + \Lambda_2 + \Lambda'_2), \\ \int_{CC'} x^2 f(x) dx &= 2\pi i (a^2\Lambda_1 + a'^2\Lambda'_1 + 2a\Lambda_2 + 2a'\Lambda'_2 + \Lambda_3 + \Lambda'_3), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

II. Supposons que les deux cercles C et C' ne soient pas entièrement extérieurs l'un à l'autre; alors toute fonction $f(x)$, holomorphe aux points situés à la fois à l'intérieur du cercle C et à l'extérieur du cercle C', est développable en une série de la forme

$$(2) \quad f(x) = \Lambda_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left[\Lambda_\nu (x-a)^\nu + \frac{\Lambda'_\nu}{(x-a')^\nu} \right];$$

comme précédemment, ce développement est possible d'une infinité de manières ou d'une seule manière, suivant que les cercles C et C' se coupent ou ne se coupent pas.

III. Ces résultats s'étendent aisément aux cas où l'on considère un plus grand nombre de cercles.

Une fonction $f(x)$ holomorphe en tous les points situés à la fois à l'intérieur d'un cercle de centre a et à l'extérieur de n cercles de centres $a_1, a_2, \dots, a_n$ est développable en ces points en une série convergente de la forme

$$(3) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \Lambda_\nu (x-a)^\nu + \sum_{k=1}^k \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{\Lambda'_{\nu k}}{(x-a_k)^\nu}.$$

1° Si les cercles en question n'ont aucun point commun, ce développement n'est possible que d'une seule manière; les coeffi-

cients sont déterminés par les équations

$$(4) \quad 2\pi i A_v = \int_C \frac{f(x)}{(x-a)^{v+1}} dx, \quad 2\pi i A_v^{(k)} = \int_{C_k} f(x)(x-a_k)^{v-1} dx,$$

les indices C et C_k indiquant que les intégrales sont prises sur les circonférences C ou C_k de centres a ou a_k .

2° Si au contraire deux ou plusieurs des cercles en question se coupent ou seulement se touchent, le développement en série (3) est possible d'une infinité de manières; le degré d'indétermination des coefficients A_v et $A_v^{(k)}$ est fixé par les conditions suivantes : si le cercle C ou l'un des cercles C_k n'est rencontré par aucun autre cercle, les coefficients A_v ou $A_v^{(k)}$ relatifs à ce cercle sont toujours déterminés par les formules (4) et ne sont susceptibles que d'une valeur; ce ne sont que les coefficients relatifs aux cercles qui se rencontrent qui sont susceptibles d'une infinité de valeurs.

*Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt,
sur les nombres de Bernoulli; par M. ÉDOUARD LUCAS.*

(Séance du 6 avril 1883.)

Clausen et Staudt ont découvert en même temps sur les nombres de Bernoulli un théorème fort remarquable que l'on peut énoncer ainsi : *On a pour les nombres de Bernoulli l'expression*

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \dots - \frac{1}{\lambda},$$

dans laquelle $A_3, A_1, A_2, \dots, A_n$ désignent des nombres entiers, et $2, 3, 5, \dots, \lambda$ tous les nombres premiers qui surpassent de l'unité tous les diviseurs de n . Nous donnerons de ce théorème une démonstration directe qui repose, d'une part, sur la méthode de sommation des puissances que l'on doit à Fermat et, d'autre part, sur les théorèmes de Fermat et de Wilson. Posons

$$X_p = x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1),$$

et désignons par Γ_p^q la somme des p premiers nombres pris q à q ,

nous aurons

$$x^p + \Gamma_{p-1}^1 x^{p-1} + \Gamma_{p-1}^2 x^{p-2} + \dots + \Gamma_{p-1}^{p-1} x = X_p;$$

si l'on remplace successivement p par $1, 2, 3, \dots, n$, on obtient n équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités

$$x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, \dots, x, 1.$$

En développant leur déterminant, suivant les éléments de la dernière colonne, on a

$$(1) \quad x^n = X_n + \Delta_1 X_{n-1} + \dots + \Delta_{n-p+1} X_{p-1} + \dots + \Delta_{n-1} X_1,$$

après avoir posé

$$(-1)^{n-p+1} \Delta_{n-p+1} = \begin{vmatrix} \Gamma_{n-1}^1 & \Gamma_{n-1}^2 & \Gamma_{n-1}^3 & \dots & \Gamma_{n-1}^{n-p+1} \\ 1 & \Gamma_{n-2}^1 & \Gamma_{n-2}^2 & \dots & \Gamma_{n-2}^{n-p} \\ 0 & 1 & \Gamma_{n-3}^1 & \dots & \Gamma_{n-3}^{n-p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{p-1}^1 \end{vmatrix}.$$

Mais, d'après la théorie des combinaisons,

$$\Gamma_q^r = \Gamma_{q-1}^{r-1} + q \Gamma_{q-1}^{r-2};$$

par conséquent, si l'on retranche respectivement des éléments de la première ligne ceux de la deuxième multipliés par $n-1$, de la deuxième ceux de la troisième multipliés par $n-2$, etc., on pourra ramener tous les indices inférieurs de Γ à $p-1$. Donc

$$(-1)^{n-p+1} \Delta_{n-p+1} = \begin{vmatrix} \Gamma_{p-1}^1 & \Gamma_{p-1}^2 & \Gamma_{p-1}^3 & \dots & \Gamma_{p-1}^{n-p+1} \\ 1 & \Gamma_{p-1}^1 & \Gamma_{p-1}^2 & \dots & \Gamma_{p-1}^{n-p} \\ 0 & 1 & \Gamma_{p-1}^1 & \dots & \Gamma_{p-1}^{n-p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Gamma_{p-1}^1 \end{vmatrix}.$$

Cela posé, désignons par p un nombre premier impair; la congruence

$$(x-1)(x-2)\dots(x-p+1) + 1 = x^{p-1} \equiv 0, \pmod{p},$$

de degré $p-1$, étant vérifiée par $p-1$ valeurs non congrues de x , savoir : $1, 2, 3, \dots, (p-1)$, est identique; par suite,

$$\Gamma_{p-1}^1 \equiv 0, \quad \Gamma_{p-1}^2 \equiv 0, \quad \Gamma_{p-1}^3 \equiv 0, \quad \dots, \quad \Gamma_{p-1}^{p-1} \equiv 1.$$

et, d'ailleurs, Γ_{p-1}^q est nul pour $q > p-1$. En portant ces résultats dans l'expression de Δ_{n-p+1} , on obtient un déterminant dont tous les éléments sont nuls, à l'exception de deux lignes obliques parallèles à la diagonale principale, dont l'une a tous ses éléments égaux à $+1$, et l'autre à -1 . On voit très simplement que ce déterminant est égal à 1 ou à 0 , suivant que le nombre des colonnes $n - (p-1)$ du déterminant est ou n'est pas multiple de $p-1$.

Par suite,

$$\Delta_{n-p+1} \equiv 1 \text{ ou } \equiv 0, \pmod{p},$$

suivant que $p-1$ est ou n'est pas diviseur de n .

Mais si, dans la formule (1), on remplace x par $1, 2, 3, \dots, x$, et si l'on fait la somme S_n , on obtient par la méthode de Fermat

$$S_n = \frac{X_{n+1}}{n+1} + \Delta_1 \frac{X_n}{n} + \dots + \Delta_{n-q+1} \frac{X_q}{q} + \dots + \Delta_{n-1} \frac{X_2}{2}.$$

En prenant avec Bernoulli (*Ars conjectandi*) le coefficient de x dans S_n , on a pour le nombre de Bernoulli l'expression

$$B_n = \frac{1.2.3\dots n}{n+1} + \dots + \Delta_{n-q+1} \frac{\Gamma_{q-1}^{q-1}}{q} + \dots + \Delta_{n-1} \frac{1}{2}.$$

En laissant de côté les dénominateurs 2 et 4 , que l'on traite immédiatement, on voit qu'en supprimant les entiers la fraction

$$\Delta_{n-q+1} \frac{\Gamma_{q-1}^{q-1}}{q}$$

se réduit : 1° à zéro, pour q composé, puisque $1.2.3\dots(q-2)$ est divisible par q ; 2° à zéro, pour q premier, lorsque $q-1$ n'est pas un diviseur de n ; 3° à $\frac{-1}{p}$, pour q égal à un nombre premier p impair tel que $p-1$ divise n , puisque alors

$$\Delta_{n-p+1} \equiv 1, \quad \Gamma_{p-1}^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Sur deux séries nouvelles qui expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné; par M. DAVID.

(Séance du 16 mars 1883.)

Ces séries sont les suivantes :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \cos x = 1 - \frac{4x^2}{1.2\pi^2} + \frac{4x^2(4x^2 - 2^2\pi^2)}{1.2.3.4\pi^4} \\ \quad - \frac{4x^2(4x^2 - 2^2\pi^2)(4x^2 - 4^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6\pi^6} + \dots \\ \sin x = \frac{2x}{\pi} - \frac{2x(4x^2 - \pi^2)}{1.2.3\pi^3} + \frac{2x(4x^2 - 3^2\pi^2)}{1.2.3.4.5\pi^5} \\ \quad - \frac{2x(4x^2 - \pi^2)(4x^2 - 3^2\pi^2)(4x^2 - 5^2\pi^2)}{1.2.3.4.5.6.7\pi^7} + \dots \end{array} \right.$$

Elles expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné x en mettant en évidence, dans les numérateurs de leurs termes, successivement, les racines des équations $\sin x = 0$, $\cos x = 0$. Pour une valeur de x comprise entre deux racines, les deux termes consécutifs correspondants ont le même signe; à partir de là les signes des termes ne changent plus, et ceux-ci vont en diminuant. Ces formules sont d'ailleurs convergentes, comme les formules connues, pour une valeur finie quelconque de x ; et la convergence ne devient manifeste qu'à partir du moment où tous les termes ont le même signe.

Pour les démontrer, je pars des formules

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} e^{-m\alpha i} = e^{\pm \frac{(2k+1)m\pi}{2}i} \left\{ 1 - \frac{m^2}{1.2} \cos^2 \alpha + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \cos^4 \alpha - \dots \right. \\ \quad \left. + \frac{i}{\sin \frac{m(2k+1)\pi}{2}} \left[\frac{m}{1} \cos \alpha - \frac{m(m^2 - 1)}{1.2.3} \cos^3 \alpha + \dots \right] \right\}, \\ \\ (2) \left\{ \begin{array}{l} e^{-m\alpha i} = e^{-mk\pi i} \left\{ 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2 \alpha + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \sin^4 \alpha - \dots \right. \\ \quad \left. - \frac{i}{\cos mk\pi} \left[\frac{m}{1} \sin \alpha - \frac{m(m^2 - 1)}{1.2.3} \sin^3 \alpha + \dots \right] \right\}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui développent l'exponentielle en puissances des sinus ou cosinus de l'arc z ; la première formule ayant lieu pour l'arc z compris entre les arcs limites $k\pi$ et $(k+1)\pi$; la seconde pour l'arc z compris entre les arcs limites $\frac{(2k-1)\pi}{2}$ et $\frac{(2k+1)\pi}{2}$; les signes supérieurs devant être pris ensemble, et de même pour les signes inférieurs; sous cette réserve, le nombre quelconque m , l'arc z et par suite le nombre entier k sont toujours positifs.

Leur démonstration est très simple.

Par exemple, pour la formule (1), on pose

$$x = \cos z, \quad y = \cos z + i \sin z,$$

ce qui donne l'équation algébrique

$$y^2 - 2xy + 1 = 0,$$

laquelle fait connaître que les deux valeurs de y et leurs puissances sont développables en série par rapport aux puissances entières et croissantes de x , tant que le module de x est plus petit que 1. En posant ensuite $v = e^{mxi} = y^m$, on forme l'équation différentielle

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 v}{dx^2} + x \frac{dv}{dx} - m^2 v = 0.$$

De là on déduit, en remplaçant x par sa valeur $x = \cos z$,

$$v = A \left[1 - \frac{m^2}{1.2} \cos^2 z + \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{1.2.3.4} \cos^4 z + \dots \right] \\ + A_1 \left[\frac{m}{1} \cos z - \frac{m(m^2 - 1)}{1.2.3} \cos^3 z + \dots \right];$$

les constantes arbitraires A, A_1 se déterminent ensuite en donnant à z la valeur particulière $z = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, comprise entre les limites déterminées ci-dessus, savoir $k\pi$ et $(k+1)\pi$.

La démonstration de la formule (2) a lieu d'une manière analogue, en posant $x = \sin z$, ce qui fournit l'équation algébrique

$$y^2 - 2ixy + 1 = 0,$$

pour déterminer les limites, et la même équation différentielle pour déterminer la série.

En séparant les imaginaires, on retrouve les quatre formules de Poinsot, pour exprimer le sinus et le cosinus d'un multiple de l'arc;

et il est clair que réciproquement celles-ci pourraient servir à remonter aux formules (1) et (2). Seulement, dans la marche que nous suivons, le nombre k est déterminé *a priori*, parce qu'on suppose que c'est l'arc z qui est donné, tandis qu'en supposant avec Poinsolet que l'on donne $\cos z$ ou $\sin z$, l'arc et par suite le nombre k restent indéterminés.

Les formules (1) et (2) ne sont établies par là que pour les valeurs de z comprises entre les limites indiquées. Il y a lieu d'examiner si la convergence subsiste à ces limites, et c'est cet examen qui donne la démonstration des deux séries (A) dont il s'agit. Il suffit de considérer la formule (1), attendu que la formule (2) conduit aux mêmes résultats.

Les limites sont données par $z = k\pi$ et $z = (k+1)\pi$; en faisant cette substitution, on a les deux séries

$$G = 1 - \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$H = \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + \dots,$$

dont la convergence n'est pas démontrée; et par suite on ne peut affirmer l'existence des deux formules

$$(3) \quad \begin{cases} e^{mk\pi i} = e^{\frac{(2k+1)m\pi}{2}} (G \mp iH), \\ e^{m(k+1)\pi i} = e^{\frac{(2k+1)m\pi}{2}} (G \pm iH), \end{cases}$$

déduites de (1), les signes supérieurs étant relatifs au cas de k pair et les signes inférieurs au cas de k impair.

Les séries G et H rentrent précisément dans la catégorie de celles pour lesquelles le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ de deux termes consécutifs est égal à l'unité pour une valeur de n infiniment grande. Si l'on considère la série G , on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = - \frac{m^2 - 2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - \frac{m^2}{4}}{n^2 + \frac{7}{2}n + 3}.$$

La règle de Gauss est applicable, puisque tous les termes de la série finissent par avoir le même signe. On voit alors que $2 = \frac{7}{2} + 1$

est négatif, d'où l'on conclut que la série est convergente. En ce qui concerne la série II, on a de même

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = - \frac{m^2 - (2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \frac{n^2 + n + \frac{1-m^2}{4}}{n^2 + \frac{5}{2}n + \frac{3}{2}};$$

en considérant encore les coefficients de n , on reconnaît que $1 - \frac{5}{2} + 1$ est négatif, et par suite il y a toujours convergence.

Ceci posé, les équations (3) déterminent les séries G et H, et l'on en tire les deux formules

$$\begin{aligned} \cos \frac{m\pi}{2} &= 1 - \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^2(m^2-2^2)}{1.2.3.4} - \dots \\ \sin \frac{m\pi}{2} &= \frac{m}{1} - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3} + \dots, \end{aligned}$$

qui deviennent les formules (A), en remplaçant m par $\frac{2x}{\pi}$, ce qui est permis, le nombre m ne comportant aucune restriction.

En remplaçant m par $2n$ et $2n+1$, n nombre entier, on a les identités et les séries numériques suivantes, qu'il convient peut-être de noter :

$$\begin{aligned} \pm 1 &= 1 - \frac{4n^2}{1.2} + \frac{4n^2(4n^2-2^2)}{1.2.3.4} - \dots \\ &\pm \frac{4n^2(4n^2-2^2)\dots[4n^2-4(n-1)^2]}{1.2.3\dots 2n}, \\ \pm 1 &= \frac{2n+1}{1} - \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1]}{1.2.3} + \dots \\ &\pm \frac{(2n+1)[(2n+1)^2-1]\dots[(2n+1)^2-(2n-1)^2]}{1.2.3\dots(2n+1)}, \end{aligned}$$

les signes supérieurs de ces deux formules étant relatifs au cas où n est pair et les signes inférieurs à celui où n est impair :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(2n+1)^2}{1.2} + \frac{(2n+1)^2[(2n+1)^2-2^2]}{1.2.3.4} - \dots &= 0, \\ \frac{2n}{1} - \frac{2n(4n^2-1)}{1.2.3} + \frac{2n(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} - \dots &= 0. \end{aligned}$$

Les séries qui forment le premier membre sont identiquement nulles.

Sur les ellipses décrites par les points invariablement liés à un segment constant et sur une surface circulaire du huitième ordre; par MM. J.-S. et M.-N. VANĚČEK.

(Séance du 20 avril 1883.)

1. Considérons deux axes fixes rectilignes A, B dans un plan et une droite D dont deux points a, b glissent sur les axes donnés. On sait que chaque point de la droite D décrit pendant ce mouvement une ellipse.

M. Jules de la Gournerie a démontré que le lieu des sommets de toutes ces ellipses est une courbe du sixième ordre et que leurs foyers se trouvent sur une hyperbole.

M. Chasles a considéré les autres points du plan P dans lequel s'exécute le mouvement de la droite D .

Il a trouvé que chaque point du plan P , invariablement lié à la droite D , décrit une ellipse, excepté les points d'une circonférence, lesquels points parcourent les droites passant par le point d'intersection des droites fixes A, B .

Dans la présente Note nous allons étendre ces recherches et faire connaître une surface du huitième ordre engendrée par une circonférence comme application du mouvement, dont nous avons parlé tout à l'heure, dans l'espace.

1.

2. Joignons le point décrivant c aux extrémités a, b de la longueur constante qui se trouvent en une position donnée et menons une droite perpendiculaire cd du point c à la droite ab .

Quand le triangle abc reste invariable, son sommet c décrit une ellipse. A une division de la longueur ab par le point d et à l'infinité des hauteurs cd correspond une infinité de courbes; de même, à une hauteur constante cd et à l'infinité des divisions de la longueur ab correspond une infinité d'ellipses.

D'après M. Chasles on construit la normale à l'ellipse engendrée par un point c en un de ses points c en élevant les normales

en les points a, b de la droite mobile aux axes fixes A, B . La droite qui joint le point de rencontre n de ces normales au point c est la normale demandée.

3. Toutes les ellipses décrites par les points c qui se trouvent sur la droite cd ont leurs centres au point d'intersection s des axes fixes A, B .

De là suit que chaque droite passant par s est un diamètre, en direction, de toutes ces ellipses. Il est clair qu'aux positions parallèles de la droite mobile ab correspondent les extrémités du même diamètre.

On peut demander l'extrémité d'un tel diamètre P .

Par les extrémités a, b d'une position de la droite D et par le point de rencontre s des axes fixes A, B faisons passer la circonférence O d'un cercle. La droite donnée P rencontre O en un point m . Joignons ce point au point c correspondant à la position ab . La droite mc rencontre la circonférence O encore en un point m' .

En portant le segment cm' du point s sur P jusqu'au point e , ce point est l'extrémité du diamètre P .

Cela résulte de ce raisonnement. Les droites am', bm' font le même angle que les axes A, B . Quand nous supposons que les sommets a, b du triangle mobile abc parcourent les droites am', bm' , le sommet c décrit une ellipse E' dont le centre est m' et qui est superposable à l'ellipse E décrite par le point c par rapport aux axes A, B . Le segment cm' est la longueur du demi-diamètre d'ellipse E' sur la droite cm .

Quand le point m' vient en s , les droites am', bm', cm' prennent les positions des droites A, B, ms ; le segment cm' est donc la longueur du demi-diamètre ms .

A deux points m_1, m_2 de la circonférence O également éloignés du point c correspondent deux diamètres égaux de l'ellipse E . Au maximum et au minimum de ces distances correspondent les axes de E , qui passent alors par les extrémités du diamètre co de la circonférence O .

On pourra ainsi construire l'ellipse E par les points situés sur les rayons du faisceau (s).

4. Supposons que la circonférence O soit tracée et qu'un dia-

mètre quelconque la coupe en deux points l, m . Les droites lc et mc rencontrent O respectivement en deux autres points l', m' qui déterminent avec le point s les directions des *deux diamètres conjugués* de l'ellipse E ; cm est égale au demi-diamètre sur $m's$ et cl est égale au demi-diamètre sur $l's$.

La propriété de ces deux diamètres, $l's, m's$, d'après laquelle la normale élevée à l'extrémité de l'un d'eux est perpendiculaire à l'autre, nous apprend que ce sont des diamètres conjugués.

5. De cette construction des diamètres conjugués résulte immédiatement la construction des *axes de l'ellipse E* .

Le diamètre co de la circonférence O rencontre cette ligne en deux points m_1, m_2 , et les droites m_1s, m_2s sont les axes en direction de l'ellipse E ; les longueurs des demi-axes sont respectivement égales aux segments m_2c, m_1c .

De là, il résulte que les axes de l'ellipse E sont des diamètres conjugués.

Nous voyons que la *somme* ou la *différence des axes* des ellipses E , engendrées par un point c qui change sa position sur la droite cd , le segment ab étant invariable, est *constante* et égale au diamètre de la circonférence O .

Quand le point c est placé au centre o de la circonférence O , les axes des ellipses E deviennent égaux. Donc :

Quand le sommet c d'un triangle mobile abc est le centre de la circonférence O passant par les points a, b, s , ce sommet décrit une circonférence (c) ayant son centre en s et dont le rayon est égal à cs .

6. Considérons une droite quelconque H , passant par le point c , qui coupe la circonférence O en deux points m, n . Puisque nc, mc sont respectivement les longueurs des demi-diamètres ms, ns , nous obtenons, d'après une propriété bien connue sur les transversales d'une circonférence, ce théorème :

On peut faire correspondre tous les diamètres d'une ellipse deux à deux de telle façon que le produit d'un tel couple soit une quantité constante, égale au produit de ses axes.

Quand on peut mener du point c deux tangentes réelles à la cir-

conférence O , on voit qu'il y a deux diamètres égaux, dont chacun se confond avec son diamètre correspondant.

7. Les sommets c des triangles semblables à abc , qui se meuvent sur les droites fixes A, B , décrivent des ellipses concentriques, semblables et semblablement placées.

Nous pouvons appliquer cette propriété à la *construction d'une ellipse, dont on connaît le centre s et trois points p, q, r .*

Pour résoudre ce problème, il faut se rappeler ce théorème :

Le lieu des points dont les distances à deux points fixes m, n sont en un rapport constant est une circonférence qui a son centre sur la droite mn . Cette circonférence divise la droite mn suivant le rapport donné.

Soient donnés trois points p, q, r d'une ellipse et son centre s . Traçons une circonférence O' qui passe par le point s et rencontre les diamètres P, Q, R , passant par p, q, r , respectivement aux points p_1, q_1, r_1 .

Si nous construisons un point c_1 , qui remplisse la condition

$$c_1 p_1 : c_1 q_1 : c_1 r_1 = \frac{1}{sp} : \frac{1}{sq} : \frac{1}{sr},$$

ce que nous pouvons exécuter au moyen de deux circonférences; le point c_1 appartient à une ellipse E' , qui est évidemment semblable à l'ellipse cherchée E , car

$$sp' : sq' : sr' = sp : sq : sr,$$

p', q', r' étant les extrémités des diamètres P, Q, R de l'ellipse E' . On détermine facilement les points p', q', r' , quand on connaît la position du point décrivant c_1 et sa circonférence correspondante O' .

Soit o' le centre de la circonférence O' . Si nous déterminons le point o sur $o's$ et le point c sur $c_1 s$, de telle façon que

$$\frac{so}{so'} = \frac{sp}{sp'} = \frac{sc}{sc_1},$$

le point c est celui qui engendre l'ellipse E , et le point o est le centre de la circonférence O , correspondant à la position du triangle mobile, quels que soient les axes fixes A, B .

8. Supposons deux triangles abc , abc' , symétriquement placés par rapport à la droite ab . Les sommets c , c' décrivent deux ellipses, que nous appellerons *ellipses conjuguées*.

La somme ou la différence des axes de l'une est égale respectivement à la somme ou à la différence des axes de l'autre, ou la somme des axes de l'une est égale à la différence des axes de l'autre ellipse.

Quand les deux axes fixes A , B font un angle droit, les deux ellipses conjuguées sont égales et symétriquement placées par rapport aux droites A , B .

Le point c du triangle abc décrit une droite quand le sommet c se trouve sur la circonférence passant par les points a , b , s . Son point symétriquement conjugué c' , est situé de même sur cette circonférence quand la droite mobile ab est un diamètre, ce qui arrive quand les deux droites A , B sont perpendiculaires.

Donc :

Quand l'angle que font les axes fixes A , B est aigu, il n'y a qu'un couple d'ellipses dont une devient une droite, et quand A , B font un angle droit, il y a un seul couple d'ellipses qui deviennent des droites.

Dans le cas où les deux points c , c' se confondent ou, en d'autres termes, que le point c est situé sur la droite ab , les ellipses conjuguées correspondantes se confondent de même.

9. Examinons le lieu des sommets des ellipses qui correspondent aux points d'une droite perpendiculaire à la droite mobile ab en un de ses points.

Les normales menées en ces points a , b aux axes fixes A , B se rencontrent en un point n dont le lieu est, comme on sait, une circonférence (n) de centre s .

Nous avons vu que tous les axes des ellipses passent par le point s . On construira le sommet sur une droite passant par s , comme il suit :

De son point de rencontre n avec la circonférence (n), abaissons des normales sur les droites A , B . Leurs pieds a , b déterminent la position correspondante du segment ab . Exécutons convenablement la division donnée de ce segment par le point d . La perpendiculaire élevée en ce point à la droite ab rencontre le rayon ns

au sommet cherché v . Nous obtenons deux tels points sur la droite ns , symétriquement placés par rapport au centre s .

Parmi ces ellipses, il y en a deux dont chacune se réduit à une droite terminée; par conséquent, deux des sommets de chacune d'elles se réunissent au point s .

De là suit que le centre s est un point quadruple de la courbe qui est le lieu des sommets. Et comme, sur une droite passant par s , il n'y a que deux points distincts de s , il s'ensuit que le lieu (v) des sommets des ellipses considérées est une courbe du sixième ordre.

Pour trouver les points à l'infini de la courbe (v), plaçons la droite ab de telle façon que $sa = sb$. La perpendiculaire ns à la droite ab divise l'angle (A, B) en deux parties égales, et elle est parallèle à la normale élevée au point d à ab . Leur point d'intersection v est donc à l'infini. Par conséquent, la courbe (v) a ses points à l'infini, sur les bissectrices de l'angle des droites A, B .

La courbe (v) a deux points doubles à l'infini.

10. Sur chaque droite P , passant par s , il y a deux points qui sont les sommets d'une ellipse E dont un axe est situé sur P . Les foyers d'une telle ellipse sont situés sur P , et le point s est le milieu de leur distance.

Le lieu des foyers des ellipses E est, par conséquent, une conique (f) ayant s pour centre.

Cette conique touche la courbe (v) aux quatre extrémités x, x', y, y' des droites suivant lesquelles sont dégénérées deux ellipses de la série; de plus elle passe par les points doubles, à l'infini, de la courbe (v).

La conique (f) est une hyperbole équilatère parce que ses deux points, à l'infini, sont situés sur les bissectrices de l'angle des droites A, B ; les asymptotes se coupent donc à angle droit.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Les ellipses engendrées par les points d'une droite C perpendiculaire et invariablement liée à la droite ab dont les points a, b parcourent deux axes fixes A, B ont leurs sommets sur une courbe (v) du sixième ordre ayant deux points doubles à l'infini et le point s comme point quadruple.

Le lieu des foyers de ces ellipses est une hyperbole équilatère (f) qui coupe la courbe (v) aux points doubles à l'infini et la touche en quatre points. Les asymptotes de cette hyperbole sont les bissectrices de l'angle des droites A, B .

II.

11. Considérons deux droites A, B qui ne sont pas dans un même plan, et un segment constant ab dont les extrémités a, b glissent sur ces droites.

Un point quelconque c , dans l'espace, est invariablement lié aux points a, b de telle façon qu'il engendre une circonférence C dont le rayon est cd , le point d étant le pied de la perpendiculaire abaissée du point c sur la droite ab . Les distances ab, ac, bc sont donc constantes, et par conséquent de même la division de la longueur ab par le point d .

Nous pouvons déterminer la circonférence C , en construisant une sphère α qui a son centre en a et dont le rayon est égal à ac ; cette sphère est rencontrée par une autre sphère β de centre b , ayant son rayon égal à bc , suivant la circonférence C .

Quand la droite ab change de position, les sphères α, β le font aussi; la circonférence C engendre une surface (C).

Déterminons l'ordre de cette surface. A cet effet, cherchons les points de rencontre d'une droite quelconque C avec (C).

La surface (ab) engendrée par le segment constant ab est, comme on sait, du quatrième degré, et admet comme droites doubles les droites A, B et la droite I à l'infini. Coupons la droite A par une sphère décrite d'un point c de la droite C comme centre, avec le segment constant ac pour rayon et la droite B avec le segment bc , et joignons les points d'intersection sur A avec ceux sur B . La surface auxiliaire ainsi engendrée est du huitième degré et admet les droites A, B, I pour lignes quadruples. Cette surface rencontre la surface (C) seulement suivant des droites, et, puisqu'elles se rencontrent encore en huit autres droites, auxquelles correspondent huit points de la surface (C) sur la droite C ,

La surface (C) est du huitième ordre.

12. Nous allons nous occuper d'abord de la surface qui provient du mouvement d'une circonférence C , qui a son centre d sur un segment constant ab , dont les extrémités a, b glissent sur deux droites A, B situées dans un plan P .

Si les droites A, B font un angle quelconque, la surface (C) est symétrique seulement par rapport au plan P .

Dans le cas où les droites A, B sont perpendiculaires, la surface (C) possède trois plans de symétrie rectangulaires deux à deux : le plan P et deux plans passant par les droites A, B .

Cependant la surface (C) a toujours un centre réel, qui est le point de rencontre s des droites A, B .

13. Supposons que les extrémités du diamètre situé dans le plan P de la circonférence C soient c, c' . Ces points décrivent, d'après le n° 8, deux ellipses conjuguées dans le plan P , qui fournissent la section réelle du plan P avec la surface (C) .

Chaque plan P_1 , parallèle au plan P , dont la distance à ce plan est plus petite que le rayon de la circonférence C , rencontre la surface (C) suivant une courbe réelle.

Cherchons le caractère d'une telle section.

Le plan P_1 coupe la circonférence mobile C en deux points c, c' qui se projettent orthogonalement sur le plan P en deux points situés sur une droite C_1 , projection de la circonférence C , dont le milieu est le point d .

Comme les éléments de notre figure en projection restent les mêmes, c'est-à-dire la longueur ab et la division de ce segment par le point d , les points c_1, c'_1 décrivent deux ellipses conjuguées $(c_1), (c'_1)$, qui sont les projections de la courbe $(c), (c')$ provenant de la section de la surface (C) par le plan P_1 . Par conséquent, cette section consiste en deux ellipses conjuguées.

Un autre plan P'_1 , symétrique de P_1 par rapport au plan P , rencontre la surface (C) de même suivant deux ellipses conjuguées respectivement superposables à (c) et (c') .

Donc :

Un plan parallèle au plan P des droites A, B rencontre la surface (C) suivant deux ellipses conjuguées.

Nous avons vu, au n° 8, que l'une des deux ellipses conju-

guées peut devenir une droite; ce qui arrive deux fois. Quand les droites A, B font un angle droit, si l'une de ces ellipses devient une droite, la deuxième est aussi une droite.

Il y en a ainsi quatre sur la surface (C) . Ce sont des droites doubles de la surface (C) .

Quand les droites A, B font un angle quelconque, les droites doubles ne sont pas deux à deux dans un plan parallèle au plan P ; seulement quand les droites A, B font un angle droit, il y a deux plans également éloignés du plan P dans lesquels se trouvent deux à deux les droites doubles de la surface (C) . Mais, en tout cas, toutes ces droites sont parallèles au plan P . Les droites, symétriquement conjuguées, sont parallèles.

De là suit que :

Sur la surface (C) il y a quatre droites doubles qui peuvent être deux à deux dans un même plan. Ces deux plans sont symétriquement placés par rapport au plan P .

Le plan des deux droites doubles symétriquement conjuguées par rapport à P rencontre la surface (C) encore suivant deux circonférences.

Quand le plan sécant P_1 est à une distance de P égale au rayon de la circonférence mobile C , les deux ellipses conjuguées provenant de cette section se confondent en une seule. Il touche alors la surface (C) suivant cette ellipse. Il y a deux plans qui remplissent cette condition.

Donc :

Deux plans parallèles au plan P sont tangents à la surface (C) tout le long d'une ellipse; ces deux ellipses sont superposables.

Si le point d est le milieu du segment ab et si les axes fixes A, B font un angle droit, les ellipses conjuguées réunies en une seule courbe deviennent une circonférence.

Les autres plans, dont la distance au plan P est plus grande que le rayon cd de la circonférence C , rencontrent la surface (C) en des ellipses conjuguées imaginaires; de même le plan de l'infini.

14. Nous avons trouvé, au n° 9, que les sommets des ellipses

conjuguées sont situés sur une courbe (v) du sixième ordre. Pour la surface (C), cette courbe est terminée par les sommets des ellipses situés dans le plan P .

Comme la courbe plane (v) est la projection orthogonale d'une courbe dont toute projetante contient deux points, la courbe, sur la surface, est du douzième ordre.

Les quatre droites doubles sur la surface (C) sont des ellipses dont deux sommets se confondent. De là suit que la courbe (v) a quatre points doubles, situés sur une droite passant par le centre s de (C), et deux points doubles imaginaires à l'infini.

Nous pouvons énoncer ce théorème :

Si les droites A, B font un angle droit, les points doubles réels se confondent deux à deux, et la courbe (v) possède deux points quadruples réels et deux points doubles imaginaires à l'infini.

Considérons une surface générale (C). Soit P un plan parallèle aux droites A, B qui ne sont pas dans un même plan. Cherchons la ligne provenant de l'intersection du plan P avec (C). La surface (C) a un de ses points sur P quand le sommet c du triangle invariable abc , dont deux sommets a, b glissent sur les droites A, B , est dans le plan P . Projetons orthogonalement sur le plan P en $a_1 b_1 c_1, a'_1 b'_1 c'_1$ les triangles $abc, a'b'c'$ qui satisfont à cette condition. Les triangles $a_1 b_1 c_1, a'_1 b'_1 c'_1$ sont superposables, ainsi que tous les autres obtenus par le même procédé. Leurs sommets $a_1, a'_1, \dots; b_1, b'_1, \dots$ se trouvent respectivement sur les projections A_1, B_1 des droites A, B sur le plan P , et les troisièmes sommets ont pour lieu la courbe cherchée. Il résulte alors de ce qui précède que :

La courbe d'intersection d'un plan P , parallèle aux droites A, B , avec la surface (C) consiste en deux ellipses conjuguées.

15. On trouvera, par le même raisonnement que dans le numéro précédent, que :

Le lieu des foyers des sections coniques sur la surface (C) est une courbe (f) du quatrième ordre, partagée en deux parties, qui se projette orthogonalement sur le plan P suivant une hyperbole équilatère.

16. Quand deux circonférences C de la surface (C) se coupent en un point, ce point est double. Le lieu de ces points est une courbe sur la surface qui se projette sur le plan P suivant une courbe dont la construction est la suivante :

D'un point a de la droite A fixe, traçons les deux droites ab, ab_1 ayant la longueur constante donnée et élevons en leurs points d, d_1 les perpendiculaires à ces droites jusqu'à leur point de rencontre m . Ce point est la projection des deux points cherchés sur la surface.

Nous obtenons ainsi, dans le plan P , deux parties d'une hyperbole dont une asymptote est la droite A , et l'autre est perpendiculaire à la droite B . Le centre de cette hyperbole est le point s . Si l'on effectue la même construction par rapport à la droite B , on obtiendra une autre hyperbole ayant le même centre s et la droite B pour asymptote; l'autre asymptote est normale à la droite A .

Quand les droites A, B font un angle droit, les deux hyperboles se réduisent à ces droites.

Les axes de ces deux hyperboles, qui sont semblables, ont les mêmes directions que les axes de l'hyperbole (f) .

En portant ces résultats sur la surface (C) , nous voyons qu'il y a deux courbes doubles sur cette surface, dont chacune est du quatrième ordre.

Reprenons la construction de la surface (C) . La sphère α , dont le centre est en a sur A et le rayon est égal à ac , rencontre la sphère β , ayant son centre b sur B et de rayon égal à bc , en une circonférence C réelle et en une autre imaginaire à l'infini. Cette circonférence est double sur la surface (C) .

De là suit que :

La surface (C) possède une courbe double réelle du douzième ordre, dont quatre parties sont des droites, et deux autres parties consistent en deux courbes, chacune du quatrième ordre; la circonférence imaginaire de l'infini est de même une ligne double de cette surface.

17. Une sphère S ayant son centre sur la droite A ou B , et dont le rayon est respectivement ac ou bc , rencontre la surface

(C) en deux circonférences C réelles, en la circonférence imaginaire de l'infini, et en une courbe de huitième ordre.

Quand la sphère S a son centre au point s , les circonférences C réelles sont dans deux plans parallèles.

Supposons que le segment constant ab se trouve dans la position perpendiculaire à la droite B au point b . La sphère S , ayant son centre en a et de rayon égal à ac , touche la surface, suivant la circonférence C correspondant à la position du segment mobile. La même chose a lieu par rapport à la droite A .

18. Considérons une circonférence C de la surface (C) et cherchons l'ordre de la normalie de la surface tout le long de cette ligne.

La normale N de la surface en un point c de la circonférence C est la droite d'intersection du plan normal au point c à la circonférence C , et du plan normal en ce point à l'ellipse de la surface passant par ce point.

Tous les plans normaux aux points c de la circonférence C passent par la droite ab correspondante à cette ligne. La droite ab , étant située dans le plan P , est le lieu des pieds des normales N sur P .

Les plans normaux aux ellipses de la surface (C) passant par les points c de la circonférence C sont perpendiculaires au plan P , et leurs traces passent par le point de rencontre m des normales issues des points a , b sur A , B .

Par conséquent, ces plans normaux passent par la droite M perpendiculaire au plan P au point m . De là suit que les normales N rencontrent aussi la droite M .

Puisque les droites N rencontrent les droites ab , M , et la circonférence C , elles engendrent une surface du quatrième ordre.

Donc :

La normalie à la surface (C) le long d'une circonférence C est une surface du quatrième degré.

19. Supposons que les axes fixes A , B fassent un angle droit, et qu'une droite quelconque cc' perpendiculaire au segment mobile

ab rencontre la circonférence passant par les points a, b, s aux points c, c' .

A ces points correspondent deux ellipses conjuguées réduites à des droites A', B' passant par le point s .

La surface engendrée par la circonférence C ayant cc' pour diamètre peut être aussi regardée comme engendrée par le mouvement d'une circonférence C , dont le plan est perpendiculaire au plan P , et dont les extrémités c, c' du diamètre cc' , situé dans P , glissent sur deux droites fixes A', B' .

Le plan P rencontre cette surface suivant les droites A', B' qui sont lignes doubles de la surface, dont les nappes se touchent le long de ces droites. Le point s de rencontre des droites A', B' est le centre de la surface et son point quadruple.

Toutes les autres propriétés de la surface (C) restent les mêmes.

*Note sur les résidus des invariants et covariants
des formes binaires; par M. R. PERRIN.*

(Séance du 4 mai 1883.)

I. Soit la forme binaire d'ordre m

$$(1) \quad U = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_m)(x, y)^m.$$

J'appelle *résidu* d'un invariant ou d'un covariant de cette forme ce que devient l'invariant ou la source du covariant, lorsqu'on y fait $a_m = 0$.

Je vais démontrer tout d'abord que, étant donné son résidu, l'invariant ou le covariant est complètement déterminé et peut être calculé en entier.

Soit, en effet, v un invariant ou un péninvariant (source d'un covariant) relatif à la forme U ; v est une fonction des coefficients

$a_0, a_1, \dots, a_m$; en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de a_m , nous pouvons l'écrire

$$(2) \quad v = v_p + p v_{p-1} a_m + \frac{p(p-1)}{1,2} v_{p-2} a_m^2 + \dots + p v_1 a_m^{p-1} + v_0 a_m^p.$$

On sait que la seule condition que doit remplir v pour être la source d'un covariant est de satisfaire identiquement à l'équation différentielle

$$(3) \quad a_0 \frac{dv}{da_1} + 2a_1 \frac{dv}{da_2} + \dots + (m-1)a_{m-2} \frac{dv}{da_{m-1}} + m a_{m-1} \frac{dv}{da_m} = 0.$$

Désignons, pour abréger, par $\frac{d}{d\zeta}$ l'opération

$$a_0 \frac{d}{da_1} + 2a_1 \frac{d}{da_2} + \dots + (m-1)a_{m-2} \frac{d}{da_{m-1}};$$

l'équation (3) prendra la forme

$$(4) \quad \frac{dv}{d\zeta} + m a_{m-1} \frac{dv}{da_m} = 0.$$

Considérons isolément, dans cette équation, le groupe des termes qui ne contiennent pas a_m . Puisque l'opération $\frac{d}{d\zeta}$, appliquée à un terme quelconque de v , ne change pas l'exposant de a_m , tandis que l'opération $a_{m-1} \frac{d}{da_m}$ le diminue d'une unité, il est clair que le groupe considéré s'obtiendra en totalité, et à l'exclusion de tout autre, en appliquant l'opération $\frac{d}{d\zeta}$ à v_p , et l'opération $\frac{d}{da_m}$ à $(a_m v_{p-1})$. De même, le groupe des termes contenant a_m en facteur à la première puissance seulement s'obtiendra en entier et à l'exclusion de tout autre, en appliquant l'opération $\frac{d}{d\zeta}$ à $(a_m v_{p-1})$, et l'opération $\frac{d}{da_m}$ à $(a_m^2 v_{p-2})$; et ainsi de suite. Et, comme l'équation (4) doit avoir lieu identiquement, nous pouvons évaluer à zéro séparément chacun des groupes de termes que nous avons ainsi isolés dans son premier membre, ce qui nous donnera, en supprimant le facteur commun a_m autant de fois qu'il

2. Le *résidu* d'un covariant jouit de l'une des propriétés essentielles de la *source* de ce covariant. Ainsi il est évident que toute relation identique (ou syzygie) entre des covariants et invariants subsiste entre leurs résidus aussi bien qu'entre leurs sources; et réciproquement, je dis que toute relation identique entre les résidus de divers covariants et invariants entraîne la même relation entre les covariants et invariants eux-mêmes. En effet, soient $V, V', V'', \dots$ les covariants et invariants, $v_p, v'_q, v''_r, \dots$ leurs résidus; et supposons qu'on ait identiquement

$$f(v_p, v'_q, v''_r, \dots) = 0.$$

Le covariant composé $f(V, V', V'', \dots)$, ayant un résidu identiquement nul, a sa source identiquement nulle, en vertu des équations (5); il est donc lui-même identiquement nul, ce qui revient à dire que $V, V', V'', \dots$ sont liés par la syzygie

$$f(V, V', V'', \dots) = 0.$$

Par conséquent, de même que la recherche des invariants et covariants *distincts* d'une forme binaire a été ramenée par M. Cayley à la recherche des sources ou péninvariants distincts, ainsi cette dernière recherche se ramène elle-même à la recherche des *résidus* distincts, lesquels sont des fonctions plus simples et par suite plus faciles à calculer.

La méthode de M. Cayley est d'ailleurs applicable sans modification à cette recherche des résidus : si l'on connaît tous les péninvariants distincts relatifs à la forme binaire d'ordre $m - 1$, il suffira, pour obtenir tous les résidus distincts relatifs à la forme binaire d'ordre m , d'ajouter à ce système de péninvariants *une seule* fonction nouvelle des mêmes coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, savoir le résidu de l'invariant quadratique de la forme d'ordre m , si m est pair; ou, si m est impair, le résidu du covariant de troisième degré et d'ordre m qu'on obtient en prenant le jacobien de la forme elle-même et du covariant de deuxième degré et de deuxième ordre qui a pour source l'invariant quadratique relatif à la forme d'ordre $m - 1$. Ce résidu étant ainsi ajouté au système complet des péninvariants relatifs à l'ordre $m - 1$, on le traitera comme s'il était un nouveau péninvariant, en le combinant avec les autres par l'hypothèse $a_0 = 0$ et l'élimination de a_1 , suivant la méthode connue.

3. Comme application de ce qui précède, proposons-nous de former le système des résidus distincts relatifs à la forme binaire du cinquième ordre

$$(6) \quad U = ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5.$$

Le système complet des péninvariants distincts relatifs à la forme du quatrième ordre étant

$$(7) \quad \begin{cases} u = a, & h = ac - b^2, & n = a^2d - 3abc + 2b^3, \\ s = ae - 4bd + 3c^2, & t = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3, \end{cases}$$

et le covariant principal spécial à la forme du cinquième ordre ayant pour source ⁽¹⁾

$$u' = a^2f - 5abe + 2acd + 8b^2d - 6bc^2.$$

Le résidu à ajouter au système (7) sera

$$(8) \quad u'_0 = 2acd - 5abe + 8b^2d - 6bc^2.$$

Faisant $a = 0$ dans les six expressions (7) et (8), elles deviennent

$$(9) \quad \begin{cases} h_0 = -b^2, & n_0 = 2b^3, & s_0 = 3c^2 - 4bd, \\ t_0 = 2bcd - b^2e - c^3, & u'_0 = 8b^2d - 6bc^2 = -2bs_0. \end{cases}$$

L'élimination de b fournit les trois relations

$$(10) \quad \begin{cases} (u'_0)^2 + 4h_0s_0^2 = 0, \\ h_0u'_0 - n_0s_0 = 0, \\ n_0u'_0 + 4h_0^2s_0 = 0, \end{cases}$$

qui nous apprennent, d'après un des théorèmes précédemment énoncés, que les covariants composés

$$U'^2 - 4HS^2, \quad HU' - NS, \quad NU' - 4H^2S$$

⁽¹⁾ J'emploie, pour désigner les invariants, covariants et péninvariants relatifs au cinquième ordre, la même notation que dans mes deux Notes sur le même sujet, insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVI (1883), pages 479 et 563. P, P', ... sont les covariants linéaires ou du premier ordre, rangés d'après leur degré par rapport aux coefficients; S, S', ... ceux du second ordre; T, T', ... ceux du troisième; Q, Q', ... du quatrième; U, U', ... du cinquième (U étant la forme primitive); H, H', ... du sixième (H étant le hessien); R celui du septième et N celui du neuvième. Les minuscules correspondantes désignent les sources des covariants, et avec l'indice 0, leurs résidus. J, K, L, sont les trois invariants de M. Sylvester, L est l'invariant gauche de M. Hermite.

sont divisibles par u , et leurs résidus divisibles par a . Effectuant cette division des résidus, on trouve pour quotients

$$(11) \quad \begin{cases} u_0'^2 + 4hs^2 = a^2(4c^2d^2 + 21b^2e^2 - 52bcde + 24c^3e + 4ace^2) - 12as_0t_0, \\ hu'_0 - ns = a(-ac^2d - 2abce - 6b^2cd + 3b^3e - a^2de + 3bc^3 + 4abd^2), \\ nu'_0 + 4h^2s = a^2(2acd^2 - 5abde - 28bc^2d + 8b^2d^2 + 7b^2ce + 4ac^2e + 12c^4) - 6ab^2t_0, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$U^2 + 4HS^2 + 12UST \quad \text{et} \quad NU' + 4H^2S + 6UHT$$

sont divisibles par U^2 . Effectuant la division sur les résidus, et désignant par J l'invariant et par H' et Q les covariants qui s'introduisent ainsi, il vient les trois relations

$$(12) \quad \begin{cases} U^2 + 4HS^2 + 12UST = U^2J, \\ HU' - NS = UH', \\ NU' + 4H^2S + 6UHT = U^2(S^2 - Q), \end{cases}$$

avec les valeurs suivantes des résidus de ces trois nouvelles formes

$$(13) \quad \begin{cases} J_0 = 9b^2e^2 - 76bcde + 48c^3e + 16ace^2 - 12ad^2e - 32c^2d^2 + 48bd^3, \\ h'_0 = a(c^2d - 2bce - ade + 4bd^2) - 3bt_0, \\ q_0 = a(ae^2 - 3bde + 4cd^2 - 4c^2e) + 3c^4 - 8bc^2d + 2b^2d^2 + 5b^2ce. \end{cases}$$

Il est d'ailleurs facile de former les valeurs complètes des péninvariants J , h' , q sans recourir à l'opération $\frac{d}{d\tilde{f}}$. Il suffit de remplacer dans (12) les covariants par leurs sources, et de différencier par rapport à f : les dérivées de u , h , n , s , t sont nulles, celle de u' se réduit à u^2 d'après sa valeur donnée plus haut ; il vient donc simplement

$$(14) \quad \frac{dJ}{df} = 2u', \quad \frac{dh'}{df} = uh, \quad \frac{dq}{df} = -n, \quad \frac{d^2J}{df^2} = 2u^2,$$

ce qui donne, pour les péninvariants complets,

$$(15) \quad \begin{cases} J = u^2f^2 + 2u'_0f + J_0, \\ h' = uhf + h'_0, \\ q = -nf + q_0. \end{cases}$$

Pour aller plus loin, il faut faire $a = 0$ dans J_0 , h'_0 , q_0 , ce qui

donne les restes suivants :

$$(16) \quad \begin{cases} J_{00} = 9b^2e^2 - 76bcde + 48c^3e + 48bd^3, \\ h'_{00} = -3bt_0, \\ q_{00} = 3c^4 - 8bc^2d + 2b^2d^2 + 5b^2ce. \end{cases}$$

Le premier et le dernier de ces restes, combinés avec les restes (9), ne fournissent rien de nouveau; mais le second donne les cinq relations que voici :

$$\begin{aligned} h'^2_{00} + 9h_0t_0^2 &= 0, \\ 2h_0h'_{00} - 3n_0t_0 &= 0, \\ n_0h'_{00} + 6h_0^2t_0 &= 0, \\ h'_{00}u'_{00} + 6h_0s_0t_0 &= 0, \\ 2h'_{00}s_0 - 3u'_{00}t_0 &= 0. \end{aligned}$$

Les cinq expressions $h'^2_{00} + 9ht^2$, $2hh'_0 - 3nt$, $nh'_0 + 6h^2t$, $h'_0u'_0 + 6hst$, $2h'_0s - 3u'_0t$ sont donc divisibles par a . Si l'on forme ces expressions et que l'on effectue les divisions, on trouve que, pour la troisième et la quatrième, le quotient peut s'exprimer en fonction des résidus déjà trouvés, savoir :

$$(17) \quad \begin{cases} nh'_0 + 6h^2t = u(ust - hq_0), \\ h'_0u'_0 + 6hst = u(J_0h + q_0s - s^3), \end{cases}$$

que la deuxième et la cinquième fournissent deux résidus nouveaux, que j'appellerai r_0 et t'_0 , savoir

$$(18) \quad \begin{cases} r_0 = a(c^3d + 5bc^2e - 5acde + 5b^2de - 7bcd^2 + 3ad^3) - bq_{00}, \\ t'_0 = a(-11bce^2 + 14c^2de - bd^2e - 6cd^3 + 2ade^2) \\ \quad + b(-16bcde - 2c^2d^2 + 9b^2e^2 + 3c^3e + 8bd^3), \end{cases}$$

avec les relations suivantes pour les covariants correspondants :

$$(19) \quad \begin{cases} UR = 2HH' - 3NT, \\ UT' = 3U'T - 2H'S. \end{cases}$$

Quant à l'expression $h'^2_{00} + 9ht^2$, en la divisant par a et ajoutant au quotient s^2t , le résultat devient divisible par h et donne un nouveau résidu

$$(20) \quad \begin{cases} p_0 = a(ac^3 - 2bde^2 + 14c^2e^2 - 22cd^2e + 9d^4) \\ \quad - 5(-3b^2ce^2 + 2b^2d^2e + 6bc^2de - 4bcd^3 - 3c^4e + 2c^3d^2), \end{cases}$$

dont le covariant est défini par la relation

$$(21) \quad H^2 + 9HT^2 = U(HP - S^2T).$$

Les expressions complètes des trois nouveaux péninvariants r , t' , p s'obtiendront comme ci-dessus en prenant les dérivées par rapport à f des relations (19) et (21), et tenant compte de (14); d'où

$$(22) \quad \frac{dr}{df} = 2h^2, \quad \frac{dt'}{df} = 3ut - 2hs, \quad \frac{dp}{df} = 2h', \quad \frac{d^2p}{df^2} = 2uh$$

et, par conséquent,

$$(23) \quad \begin{cases} r = 2h^2f + r_0, \\ t' = (3ut - 2hs)f + t'_0, \\ p = uhf^2 + 2h'_0f + p_0. \end{cases}$$

Faisons maintenant $\alpha = 0$ dans les expressions (18) et (20); il viendra

$$(24) \quad \begin{cases} r_{00} = -bq_{00}, \\ t'_{00} = b(9b^2e^2 + 3c^3e + 8bd^3 - 2c^2d^2 - 16bcde), \\ p_{00} = -5t_0(2d^2 - 3ce). \end{cases}$$

Comme on a d'ailleurs, en vertu de (16) et de (9),

$$(25) \quad 3q_{00} - s_0^2 = 5h_0(2d^2 - 3ce),$$

l'élimination de b et de $(2d^2 - 3ce)$ entre (24), (25), (9) et (16) fournit les huit relations suivantes :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{00}^2 + h_0q_{00}^2 = 0, \\ 2h_0r_{00} - n_0q_{00} = 0, \\ n_0r_{00} - 2h_0^2q_{00} = 0, \\ u'_{00}r_{00} + 2h_0s_0q_{00} = 0, \\ u'_{00}q_{00} - 2r_{00}s_0 = 0, \\ h'_{00}r_{00} + 3h_0q_{00}t_0 = 0, \\ h'_{00}q_{00} - 3r_{00}t_0 = 0, \\ h_0p_{00} + (3q_{00} - s_0^2)t_0 = 0. \end{array} \right.$$

On a ainsi huit nouvelles combinaisons de résidus qui sont divisibles par α . En effectuant les calculs, on trouve seulement trois

résidus nouveaux, savoir :

$$(27) \left\{ \begin{aligned} q'_0 &= a(-5abe^3 + 12acde^2 - 6ad^3e + 13b^2de^2 \\ &\quad + 4bc^2e^2 - 52bcd^2e + 24bd^4 + 20c^3de - 10c^2d^3) + bp_{00}, \\ s'_0 &= a(-3ace^3 + 2ad^2e^2 + 3b^2e^3 - bcde^2 - bd^3e - 6c^3e^2 - 8c^2d^2e + 3cd \\ &\quad + 2c^4d^2 - 3c^5e - 3b^3de^2 - 4b^2c^2e^2 \\ &\quad + 7b^2cd^2e - b^2d^4 + 5bc^3de - 4bc^2d^3, \\ u''_0 &= a(-a^2de^3 + 13abce^3 + 2abd^2e^2 - 38ac^2de^2 \\ &\quad + 34acd^3e - 9ad^5 - 12b^3e^3 + 7b^2cde^2 - 22b^2d^3e \\ &\quad + 34bc^3e^2 + 8bc^2d^2e - bcd^4 - 25c^4de + 10c^3d^3) + 2bs'_{00} - st'_{00}. \end{aligned} \right.$$

Les covariants correspondants satisfont aux huit relations suivantes, qui correspondent aux huit relations (26) :

$$(28) \left\{ \begin{aligned} R^2 + HQ^2 &= U(HPS - JHT - 9T^3), \\ 2HR - NQ &= U(H'S - U'T), \\ NR + 2H^2Q &= UT(3UT - HS), \\ U'R + 2HQS &= U(3QT - 3S^2T + 2HP), \\ U'Q - 2RS &= UQ', \\ H'R + 3HQT &= -U(2HS' + 3ST^2), \\ H'Q - 3RT &= -U(U'' + ST'), \\ HP + (3Q - S^2)T &= -US'. \end{aligned} \right.$$

En différentiant ces équations par rapport à f , on obtiendra

$$\begin{aligned} u \frac{dq'}{df} &= u^2q - nu' - 4h^2s, \\ u \frac{du''}{df} &= -us \frac{dt'}{df} - uhq + nh' + 6h^2t, \\ -u \frac{ds'}{df} &= 2hh' - 3nt, \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte des relations (19), (22), (17), (12),

$$(29) \left\{ \begin{aligned} \frac{dq'}{df} &= u(2q - s^2) + 6ht, & \frac{d^2q'}{df^2} &= -2un, \\ \frac{du''}{df} &= 2(-hq + hs^2 - ust), & \frac{d^2u''}{df^2} &= -2hn, \\ \frac{ds'}{df} &= -r, & \frac{d^2s'}{df^2} &= -2h^2, \end{aligned} \right.$$

et, par conséquent, les valeurs complètes des péninvariants q' ,

u'' , s' seront

$$(30) \quad \begin{cases} q' = -unf^2 + [u(2q_0 - s^2) - 6ht]f - q'_0, \\ u'' = -hnf^2 + 2(-hq_0 - hs^2 - ust)f - u''_0, \\ s' = -h^2f^2 - r_0f - s'_0. \end{cases}$$

Nous avons ainsi obtenu, en tout, quinze formes distinctes, y compris U, H, N, S, T et U', avec seize syzygies qui les relient entre elles. On pourrait continuer de la même manière et obtenir, de proche en proche, les huit formes distinctes qui restent à définir pour avoir le système complet : on aperçoit, en effet, à l'inspection des relations (27), que q' et p , $u'' + st'$ et s' forment deux couples nouveaux, lesquels, combinés entre eux et avec les quatre couples déjà trouvés (h, u) , (s, u') , (t, h') , (q, r) , permettent d'écrire immédiatement vingt nouvelles identités analogues à (26), et d'obtenir, par conséquent, vingt nouvelles syzygies entre des invariants et covariants, dont quelques-uns pourront être nouveaux; avec ceux-ci, on continuerait de la même manière jusqu'à ce que toutes les combinaisons possibles ne donnent plus que des quotients pouvant s'exprimer au moyen des résidus déjà connus : le système des résidus sera alors complet, et tous les péninvariants distincts pourront s'exprimer en fonction de ces résidus et des cinq péninvariants u, h, u, s, t . Mais je ne poursuivrai pas plus loin ces calculs, qui se compliquent de plus en plus et ne pourraient que, conduire à des résultats déjà connus et plus faciles à obtenir par d'autres méthodes. Je me bornerai à faire remarquer que les résidus distincts successivement trouvés se groupent par couples, tels que, des deux covariants correspondants, l'un est toujours le jacobien de l'autre et de la forme primitive U. C'est ce qu'il était aisé de prévoir; car, si un certain covariant distinct est

$$V = vx^p + pvx^{p-1}y + \dots$$

le jacobien W de U et de V aura pour source

$$w = mp.a - pv.b,$$

expression qui se réduit à $-pbc$ dans l'hypothèse $a = 0$; les résidus v_0, w_0 de ces deux covariants donneront donc pour $a = 0$

deux restes v_{00} , w_{00} liés par la relation

$$w_{00} = -pv_{00},$$

en sorte que les covariants composés

$$W^2 + p^2HV^2, \quad 2HW + pNV, \quad NW - 2pH^2V$$

seront nécessairement divisibles par U . Et si Z est le jacobien de W et de U , on aura de même

$$z_{00} = -(p + m - 2)bw_{00} = p(p + m - 2)b^2v_{00} = -p(p + m - 2)h_0v_{00},$$

ce qui entraîne

$$Z = -p(p + m - 2)HV + UZ',$$

Z' étant une fonction de covariants plus simples ; en sorte que, si V et W sont des formes distinctes, il ne peut en être de même de Z , et que la considération de ces deux formes donne bien lieu à un couple et non à une série indéfinie de formes distinctes.

4. Reprenons l'expression (2), en remplaçant a_m par le rapport $\frac{\xi}{\tau_1}$ de deux variables, et multipliant par τ_1^p pour établir l'homogénéité :

$$(31) \quad v = v_0\xi^p + pv_1\xi^{p-1}\tau_1 + \frac{p(p-1)}{1.2}v_2\xi^{p-2}\tau_1^2 + \dots + v_p\tau_1^p.$$

Telle sera l'expression générale d'un péninvariant dans lequel a_m entre à la puissance p ; je dirai que le résidu v_p d'un tel péninvariant est de rang p . Pour revenir à la forme (2), il suffit de remplacer ξ par a_m et τ_1 par l'unité.

Tous les péninvariants relatifs à la forme binaire U_m d'ordre m deviennent, à ce point de vue, des formes binaires de divers ordres par rapport aux variables ξ , τ_1 (à l'exception de ceux qui étaient en même temps relatifs à la forme U_{m-1} d'ordre $m-1$, et qui ne renferment pas ces variables). La considération de ces formes donne lieu au théorème suivant :

Tout invariant ou covariant d'un ou plusieurs péninvariants relatifs à U_m , considérés comme formes binaires aux variables ξ , τ_1 , est encore un péninvariant relatif à U_m .

En effet, soient

$$\begin{aligned} v &= v_0 \xi^p + p v_1 \xi^{p-1} \tau_1 + \dots + v_p \tau_1^p, \\ v' &= v'_0 \xi^q + q v'_1 \xi^{q-1} \tau_1 + \dots + v'_q \tau_1^q, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

divers péninvariants relatifs à U_m et w un invariant ou covariant du système composé de ces formes en ξ, τ_1 . Comme l'a montré M. Cayley, w peut être défini comme satisfaisant à la condition

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \tau_1 \frac{dw}{d\xi} &= v_0 \frac{dw}{dv_1} + 2 v_1 \frac{dw}{dv_2} + \dots \\ &+ p v_{p-1} \frac{dw}{dv_p} + v'_0 \frac{dw}{dv'_1} + \dots + q v'_{q-1} \frac{dw}{dv'_q} + \dots \end{aligned} \right.$$

Mais on a, en vertu de (5),

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\xi} &= -ma_{m-1}v_0, \\ \frac{dv_2}{d\xi} &= -2ma_{m-1}v_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{dv'_1}{d\xi} &= -ma_{m-1}v'_0, \\ \frac{dv'_2}{d\xi} &= -2ma_{m-1}v'_1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La condition (32) peut donc s'écrire

$$-ma_{m-1}\tau_1 \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dv_1} \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{dw}{dv_2} \frac{dv_2}{d\xi} + \dots + \frac{dw}{dv'_1} \frac{dv'_1}{d\xi} + \frac{dw}{dv'_2} \frac{dv'_2}{d\xi} + \dots$$

ce qui n'est autre chose que

$$(33) \quad -ma_{m-1}\tau_1 \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{d\xi},$$

puisque, pour effectuer l'opération $\frac{d}{d\xi}$, il est indifférent de l'effectuer directement sur les coefficients $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$, ou de l'effectuer avec l'intermédiaire de fonctions déterminées $v_0, v_1, \dots, v'_0, v'_1, \dots$ de ces coefficients; et que pour $v_0, v'_0, \dots$ on a d'ailleurs

$$\frac{dv_0}{d\xi} = 0, \quad \frac{dv'_0}{d\xi} = 0, \quad \dots$$

Soit maintenant

$$w = w_0 \xi^r - r w_1 \xi^{r-1} \tau_1 + \frac{r(r-1)}{1.2} w_2 \xi^{r-2} \tau_1^2 - \dots + w_r \tau_1^r$$

le covariant w : en lui appliquant la condition (33) et égalant séparément à zéro les coefficients de ξ^r , $\xi^{r-1} \tau_1$, $\xi^{r-2} \tau_1^2$, ..., il vient le système de relations

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{d\xi} &= 0, \\ -ma_{m-1}w_0 &= \frac{dw_1}{d\xi}, \\ -2ma_{m-1}w_1 &= \frac{dw_2}{d\xi}, \\ &\dots\dots\dots \\ -rma_{m-1}w_{r-1} &= \frac{dw_r}{d\xi}, \end{aligned}$$

lequel n'est autre que le système (5), et exprime, par conséquent, que w est un péninvariant relatif à U_m .

Ce théorème permet d'obtenir un grand nombre de syzygies entre les invariants et covariants de U_m , lorsqu'on connaît les expressions de ces invariants et des sources de ces covariants en fonction de ξ , τ_1 et des résidus distincts. Si l'on construit, par exemple, un invariant de ce système de formes en ξ , τ_1 , on aura, d'après le théorème, un péninvariant relatif à U_m , mais qui, ne contenant plus a_m , sera en même temps relatif à U_{m-1} ; l'expression ainsi formée, dans laquelle entreront les résidus d'un certain nombre de covariants de U_m , sera donc égale à une autre expression ne contenant que ceux de U_{m-1} , et qui sera, par conséquent, connue, aux coefficients numériques près, à cause de la double condition d'homogénéité pour le degré et pour l'ordre : il ne restera plus qu'à déterminer les valeurs des coefficients numériques en choisissant convenablement des cas particuliers. Je donnerai plus loin quelques exemples d'application de cette méthode à la recherche de nouvelles syzygies.

Puisque tout invariant et covariant d'un système de péninvariants de U_m , considérés comme formes indépendantes en ξ , τ_1 , est un péninvariant de U_m , on peut se proposer de construire le système *le plus simple* de péninvariants de U_m qui fournisse, par ses invariants et covariants par rapport à ξ , τ_1 , le système *complet*

des péninvariants distincts de U_m . Je montrerai plus loin que, pour $m = 2, 3$ ou 4 , ce système le plus simple est celui des invariants de U_m , en y ajoutant la forme linéaire τ_1 , qui doit être nécessairement introduite, puisque l'on sait que la dérivée par rapport à ξ de tout péninvariant est encore un péninvariant. Il serait intéressant de savoir s'il existe un système simple analogue pour les formes binaires d'ordre supérieur à 4 .

§. J'ai défini, plus haut, un résidu de rang p , comme étant le résidu d'un péninvariant d'ordre p en ξ, τ_1 : c'est le coefficient de τ_1^p dans le développement de ce péninvariant. Il est évident que le coefficient de $\xi^q \tau_1^{p-q}$ dans ce développement sera un résidu de rang $p - q$, car ce sera le résidu du péninvariant d'ordre $p - q$ en ξ et τ_1 qui se déduit du précédent en prenant la dérivée par rapport à ξ ; et, en général, la fonction des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$, qui multiplie $\xi^q \tau_1^{p-q}$ dans le développement d'un péninvariant d'ordre p , sera un résidu de rang q ; les résidus de rang zéro seront les péninvariants relatifs à la fois à U_m et à U_{m-1} . Le système des relations (5) montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction de $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ soit un résidu de rang q est que, en lui appliquant l'opération $\frac{d}{d\xi}$, on obtienne le produit de a_{m-1} par un résidu de rang $q - 1$.

Ceci posé, je vais démontrer le théorème suivant :

Tout résidu de rang q , relatif à l'ordre $p + 1$ et construit avec les coefficients d'un péninvariant v d'ordre p en ξ, τ_1 , est aussi un résidu de rang $(p + 1)q$ par rapport à la forme U_m .

Supposons, en effet, le péninvariant mis sous la forme (31). Le résidu w_q de rang q , construit avec $v_0, v_1, \dots, v_p$ comme se rapportant à une forme d'ordre $p + 1$, satisfera, d'après (5), à la condition

$$v_0 \frac{dw_q}{dv_1} + 2v_1 \frac{dw_q}{dv_2} + \dots + pv_{p-1} \frac{dw_q}{dv_p} = -(p + 1)q v_p w_{q-1},$$

w_{q-1} étant un résidu de rang $q - 1$ construit aussi avec $v_0, v_1, \dots, v_p$. Multipliant les deux membres de cette relation par $-ma_{m-1}$, et remplaçant, comme dans la démonstration du théorème de l'article précédent, $-ma_{m-1}v_0$ par $\frac{dv_1}{d\xi}$, $-2ma_{m-1}v_1$ par $\frac{dv_2}{d\xi}$, $\dots$

il vient

$$\frac{dw_q}{dv_1} \frac{dv_1}{d\xi} + \frac{dw_q}{dv_2} \frac{dv_2}{d\xi} + \dots + \frac{dw_q}{dv_p} \frac{dv_p}{d\xi} = m(p+1)qa_{m-1}c_p w_{q-1},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dw_q}{d\xi} = m(p+1)qa_{m-1}c_p w_{q-1}.$$

Comme c_p est un résidu de rang p par rapport à U_m , cette relation montre que le théorème, étant supposé vrai pour w_{q-1} , le sera encore pour w_q : car w_{q-1} étant, par hypothèse, un résidu du rang $(p+1)(q-1)$ par rapport à U_m , $c_p w_{q-1}$ sera un résidu de rang $p + (p+1)(q-1)$, et w_q qui par l'opération $\frac{d}{d\xi}$ donne a_{m-1} , multiplié par ce résidu, sera lui-même un résidu de rang

$$p + (p+1)(q-1) + 1,$$

c'est-à-dire $(p+1)q$. Or le théorème est évidemment vrai pour $q=1$: il est donc démontré pour toute valeur de q .

Ce théorème peut servir, comme le précédent, mais moins simplement, à obtenir de nouvelles syzygies, à condition qu'on ne l'applique qu'à former des résidus de péninvariants dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de ξ ne soit pas simplement une puissance de v_0 . Car dans l'expression (31) tout coefficient c_q est par rapport à U_m un résidu de rang égal à son indice; toute fonction isobarique de ces coefficients sera donc par rapport à U_m un résidu de rang égal à son poids π . La circonstance que cette fonction est un résidu de rang q relatif à l'ordre $p+1$ n'entraînera donc une réduction dans son rang comme résidu par rapport à U_m que si $(p+1)q < \pi$, et c'est cette réduction seule qui entraîne l'existence d'une syzygie. Or on voit facilement qu'un résidu de rang q par rapport à une forme d'ordre $(p+1)$ est de poids $(p+1)q + \lambda$, λ étant le poids du coefficient de ξ^q dans le péninvariant complet correspondant. La condition

$$\pi > (p+1)q$$

revient donc à celle-ci, $\lambda > 0$, ce qui exclut les résidus de péninvariants dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de ξ serait simplement une puissance de v_0 .

6. Je vais appliquer les notions précédentes au cas de $m = 2$, $m = 3$ et 4.

Pour $m = 2$, la forme $U_2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$ n'a qu'un invariant $D = a\xi - b^2\tau_1$; en le combinant avec la forme linéaire τ_1 , on n'obtient que le jacobien a , péninvariant commun à U_2 et à U_1 .

Pour $m = 3$, la forme $U_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ n'a qu'un invariant, savoir son discriminant

$$\Delta = a^2\xi^2 + 2(2b^3 - 3abc)\xi\tau_1 + (4ac^3 - 3b^2c^2)\tau_1^2;$$

en y ajoutant la forme linéaire τ_1 , on obtient tous les péninvariants distincts, savoir :

$$\text{Jacobien de } \Delta \text{ et de } \tau_1. \quad n = a^2\xi + (2b^3 - 3abc)\tau_1,$$

$$\text{Résultant de } \Delta \text{ et de } \tau_1. \quad u^2 = a^2,$$

$$\text{Discriminant de } \Delta. \dots (2b^3 - 3abc)^2 - a^2(4ac^3 - 3b^2c^2) \\ = -4(ac - b^2)^3 = -4h^3.$$

n est la source du covariant cubique; a et $h = ac - b^2$, trouvés comme invariants du système en ξ , τ_1 , sont les sources de la forme elle-même et de son hessien, c'est-à-dire des péninvariants communs à U_2 et à U_3 .

Pour $m = 4$, la forme primitive

$$U_4 = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4$$

possède les deux invariants S et T , dont les expressions en fonction de ξ et τ_1 sont

$$S = a\xi + (3c^2 - 4bd)\tau_1,$$

$$T = h\xi + (2bcd - ad^2 - c^3)\tau_1,$$

h désignant comme ci-dessus le péninvariant $ac - b^2$.

En ajoutant à ces deux formes linéaires la forme linéaire τ_1 , on n'obtient aucun covariant, mais seulement les trois résultants de ces trois formes prises deux à deux, savoir :

$$(S, \tau_1) = a,$$

$$(T, \tau_1) = h,$$

$$(T, S) = \Delta,$$

Δ étant le discriminant de U_3 et, par suite, un péninvariant commun à U_3 et à U_4 .

Il est à remarquer toutefois que nous n'obtenons pas la source n du covariant N du quatrième ordre. Au point de vue où nous nous sommes placés, n serait un invariant gauche du système des trois formes linéaires S , T , τ_1 ; un tel invariant n'existe pas, en général, lorsque les trois formes linéaires considérées ont leurs coefficients absolument indépendants.

L'élimination de ξ entre S et T donne

$$hS - uT = \Delta\tau_1,$$

c'est-à-dire l'expression de Δ en fonction de covariants plus simples.

Et, en général, lorsqu'on aura deux péninvariants distincts linéaires par rapport à ξ et τ_1 , l'élimination de ξ fournira immédiatement une syzygie entre ces péninvariants et ceux qui appartiennent à la forme d'ordre $m - 1$; c'est d'ailleurs un cas particulier du procédé déjà indiqué, par la formation d'invariants du système en ξ , τ_1 .

7. J'arrive à quelques applications du théorème du n° 4 à l'étude des invariants et covariants de la forme binaire U_3 du cinquième ordre.

Nous avons trouvé plus haut les expressions suivantes pour quinze des vingt-trois péninvariants distincts relatifs à cette forme :

1° Péninvariants communs à U_3 et à U_4 :

u , h , s , t , n (formules 7);

n est le seul qui soit gauche, c'est-à-dire de poids impair.

2° Péninvariants spéciaux à U_3 :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = u^2\xi + u'_0\tau_1, \\ J = u^2\xi^2 + 2u'_0\xi\tau_1 + J_0\tau_1^2, \\ h' = uh\xi + h'_0\tau_1, \\ q = -n\xi + q_0\tau_1, \\ r = 2h^2\xi + r_0\tau_1, \\ t' = (3ut - 2hs)\xi + t'_0\tau_1, \\ p = uh\xi^2 + 2h'_0\xi\tau_1 + p_0\tau_1^2, \\ q' = -un\xi^2 + (2uq_0 - us^2 + 6ht)\xi\tau_1 + q'_0\tau_1^2, \\ u'' = -hn\xi^2 + 2(-hq_0 + hs^2 - ust)\xi\tau_1 + u''_0\tau_1^2, \\ s' = -h^2\xi^2 - r_0\xi\tau_1 + s'_0\tau_1^2. \end{array} \right.$$

On peut y ajouter celles-ci :

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} K = hn\xi^3 + (3ust - hs^2 - 3hq_0)\xi^2\tau_1 + (4st'_0 + 3u''_0)\xi\tau_1^2 + K_0\tau_1^3, \\ L = h^2(hs - ut)\xi^4 + 2[(hs - ut)r_0 - nt^2]\xi^3\tau_1 \\ \quad + [6(ut - hs)s'_0 + 6q_0t^2 - 5s^2t^2]\xi^2\tau_1^2 \\ \quad + 2(st'_0 + 2ts''_0)\xi\tau_1^3 + L_0\tau_1^4, \end{array} \right.$$

qui se déduisent facilement des précédentes et des formules que j'ai données ailleurs pour l'expression des invariants K et L du huitième et du douzième degré, ainsi que de s'' et t'' , savoir :

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} uK = Jst - 12s't - p(q + s^2), \\ 3uL = (p^2 + 4Js' - Ks)t - 3pss', \\ us'' = u's' + h'p - hp' + s^2t', \\ ut'' = -2h's' - 3tu'' - 3stt'. \end{array} \right.$$

Formons, comme première application, le discriminant de s' considéré comme forme binaire quadratique en ξ, τ_1 . Ce sera

$$r_0^2 + 4h^2s'_0.$$

Puisque cette quantité est un invariant du système en ξ, τ_1 , elle doit pouvoir s'exprimer en fonction de u, h, n, s, t ; et, par suite, il en sera de même du péninvariant

$$r^2 + 4h^2s'.$$

Mais le covariant correspondant étant droit, de degré 10 et d'ordre 14, il faut que l'on ait

$$r^2 + 4h^2s' = \alpha ut^3 + \beta us^3t + \gamma hst^2 + \delta hs^4,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des coefficients *numériques*, car ce sont les seules combinaisons possibles de u, h, n, s, t .

Pour déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, supposons $h = 0$; la première relation (19) donne $u^2r^2 = 9n^2t^2 = -9u^3t^3$, à cause de la syzygie bien connue

$$n^2 + 4h^3 = u^2hs - u^3t;$$

r^2 doit donc se réduire à $-9ut^3$, ce qui exige $\alpha = -9, \beta = 0$. Faisant ensuite $t = 0$, on trouve, à cause de $ur = 2hh', h'^2 = uhp, us' = -hp$ [relations (19), (21) et (28) pour $t = 0$], que $\delta = 0$. Faisant enfin $u = 0$, et tenant compte de la première relation (28),

on voit que

$$= q^2 + 4hs' - \gamma st^2$$

doit se réduire à zéro pour $a = 0$; considérant le terme en c^8 , on trouve $\gamma = -3$. La syzygie cherchée est donc

$$(37) \quad R^2 + 4H^2S' = -3T^2(HS + 3UT),$$

et, en la comparant avec la première des syzygies (28), on trouve celle-ci

$$(38) \quad Q^2 - 3ST^2 - 4HS' = U(PS - JT),$$

que j'ai donnée aussi ailleurs.

Comme second exemple, formons le résultant de r et de t' , qui devra être égal à une fonction de u, h, n, s, t . On aura donc

$$2h^2t' - 3urt + 2hrs = n(\alpha s^3 + \beta t^2),$$

puisque le covariant ayant pour source le premier membre est gauche, de degré 9 et d'ordre 15; ce qui entraîne la forme donnée au second membre.

Pour déterminer α , faisons $t = 0$; t' devient $-\frac{2h's}{u}$ en vertu de (19), ur devient de même $2hh'$, et l'on a $\alpha = 0$.

Pour déterminer β , faisons $s = 0$; t' devient $\frac{3u't}{u}$, ur devient $2hh' - 3nt$, et, à cause de $uh' - hu' = 0$, il vient $\beta = 9$. La syzygie cherchée est donc

$$2H^2T' + 2HRS - 3URT - 9NT^2 = 0.$$

et, si l'on y remplace UR par sa valeur $2HH' - 3NT$ et qu'on divise par $2H$, elle se réduit à celle-ci, que j'ai également donnée ailleurs,

$$(39) \quad RS - HT' - 3HT = 0.$$

Je bornerai ici ces applications, en faisant remarquer, pour terminer, que les propriétés énoncées pour les résidus des péninvariants relatifs à une forme binaire unique s'étendent sans difficulté au cas d'un système de plusieurs formes binaires indépendantes, en considérant alors comme résidu ce que devient la source d'un covariant ou invariant de ce système, quand on y suppose nul le dernier coefficient de l'une des formes primitives.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 3 NOVEMBRE 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Communications :

M. Tchebicheff : *Sur les segments d'arcs paraboliques.*

M. Sophus Lie : *Sur les équations différentielles qui admettent des transformations infinitésimales.*

M. Lemoine : *Sur quelques questions de probabilité.*

M. Laguerre : *Sur le système des hypercycles tangents à quatre semi-droites données.*

M. Stephanos : *Sur la représentation des cycles par les points de l'espace.*

M. Picard : *Sur les formes quadratiques et sur les groupes discontinus.*

SÉANCE DU 17 NOVEMBRE 1882.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Élections : M. Tchebicheff, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Picquet, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Sur les tambours spiraloïdes pour les câbles d'égale résistance.*

M. Laguerre : *Sur les fonctions entières.*

M. Laguerre : *Sur les courbes de direction.*

M. Poincaré : *Sur les points singuliers des équations différentielles.*

M. Vaněček adresse un Mémoire manuscrit : *Sur les plans tangents des surfaces et sur les plans osculateurs des courbes à double courbure.*

M. Picard adresse un Mémoire manuscrit : *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes; en particulier, dans le cas des courbes du second genre.*

M. Schoute adresse deux Notes manuscrites : l'une, *Sur le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée*; l'autre, *sur deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques.*

M. Schlegel adresse une Note manuscrite : *Sur le théorème de M. Laisant relatif aux centres de gravité.*

SÉANCE DU 1^{er} DÉCEMBRE 1882.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Élections : M. Delannoy, sous-intendant militaire, et M. Le Pont, présentés dans la dernière séance par MM. Lucas et Laisant, sont élus membres de la Société.

M. Antonie, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté dans la dernière séance par MM. Picard et Piequet, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Poincaré : *Sur les conditions de convergence des séries ordonnées suivant des polynômes.*

M. Lebon : *Sur l'équation de la section droite du second extrados d'un berceau coudé.*

M. Weill : *Sur certaines propriétés métriques des coniques et, en particulier, du cercle.*

M. Fouret : *Sur une propriété relative à deux systèmes matériels, composés d'un même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune.*

M. Stephanos : *Sur un théorème d'Algèbre.*

M. de Presles : *Sur le développement en série de $\tan x$.*

SÉANCE DU 16 DÉCEMBRE 1882.

PRÉSIDENTE DE M. ANDRÉ.

Communications :

M. Fouret : *Sur une relation entre les rayons de courbure en des points correspondants de deux courbes inverses.*

M. Perrin : *Sur la formation de la résolvante de Lagrange pour l'équation du cinquième degré.*

M. Autonne : *Sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires.*

SÉANCE DU 5 JANVIER 1883.

PRÉSIDENTE DE M. HALPHEN.

Le Bureau et le Conseil sont renouvelés, comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

Élections : M. Lesage, professeur au lycée Charlemagne, présenté à la dernière séance par MM. Lebon et de Presle, et M. d'Ocagne, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté à la dernière séance par MM. Brisse et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Laguerre : *Sur la Géométrie de direction.*

SÉANCE DU 19 JANVIER 1883.

PRÉSIDENTE DE M. ROUCHÉ.

M. Perrin, au nom de la Commission des comptes, donne lecture du rapport de M. Halphen sur la gestion du trésorier en 1882. Sur sa proposition, la Société vote des remerciements à M. Claude-Lafontaine, et une gratification à ses agents.

Élections : M. Ohrtmann, rédacteur du *Jahrbuch*, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Stephanos ; M. Macé

de Lépinay, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV, présenté dans la dernière séance par MM. Rouché et André; M. Viellard, manufacturier, présenté dans la dernière séance par MM. André et Perrin; M. David, lieutenant-colonel d'Artillerie en retraite, présenté dans la dernière séance par MM. Gourzat et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Weill : *Sur des propriétés métriques relatives au cercle.*

M. Laguerre : *Sur les hypercycles cubiques.*

M. Genty adresse un Mémoire manuscrit : *Sur les quartiques gauches unicursales, et sur les courbes unicursales d'ordre m qui ont $m - 1$ points communs avec deux droites.*

SÉANCE DU 2 FÉVRIER 1883.

PRÉSIDENTE DE M. ROUCHÉ.

Élections : M. Smith, professeur à l'Université d'Oxford, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Stephanos, est élu membre de la Société ⁽¹⁾.

Communications :

M. Weill énonce un théorème *Sur les surfaces du second degré.*

M. Halphen : *Sur les points singuliers des fonctions.*

SÉANCE DU 16 FÉVRIER 1883.

PRÉSIDENTE DE M. FOURET.

Élections : M. Hugoniot, capitaine d'Artillerie de la Marine, présenté dans la dernière séance par MM. Halphen et Weill, est élu membre de la Société.

(1) La Société Mathématique a eu la douleur de perdre ce Membre éminent quelques jours après son élection. M. Smith est mort à Oxford, le 12 février 1882, au moment où l'Académie des Sciences de Paris allait lui décerner le grand Prix des Sciences Mathématiques.

Communications :

M. Stephanos : *Sur la représentation par des points de l'espace des rotations qui superposent les corps réguliers à eux-mêmes.*

M. Appell adresse un Mémoire manuscrit *Sur certains développements en série de puissances.*

SÉANCE DU 2 MARS 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communication :

M. Halphen : *Sur certaines expressions asymptotiques qu'on rencontre dans la théorie des nombres.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DU 3 NOVEMBRE 1882 AU 2 MARS 1883.

Jordan : *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*; t. I, Paris, 1882.

Reveillaud (J.-B.) : *Essai sur les chiffres arabes.* Paris, 1883.

Liguine : *Liste des travaux sur les ovales de Descartes.* (Extrait du *Bulletin des Sciences math. et astr.*).

— *Sur quelques propriétés géométriques du mouvement d'un point. Sur les systèmes articulés de Peaucellier, Hart et Kempe.* (Extraits des *Nouv. Ann. de Math.*)

Marcus Baker : *Alhazen's Problem.* (Extrait de l'*American Journal of Math.*).

Brocard : *Étude d'un nouveau cercle dans le plan du triangle.* (Extrait des *Comptes rendus du congrès d'Alger.*)

(1) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir page 11).

Schlegel : *System der Raumlehre, nach den Prinzipien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre, und als Einleitung in dieselbe.* 2 Vol., Leipzig, 1872 et 1875.

Henry (Ch.). : *Les deux plus anciens Traités français d'Algèbre et de Géométrie.*

Zeuthen : *Sur un groupe de théorèmes et formules de la Géométrie énumérative.* (Extrait des *Acta Math.*)

Brill : *Théorie des lignes et des triangles géodésiques.* (Extrait des *Mémoires de l'Acad. de Munich.*)

Capelli (Alfr.) : *Fondements d'une théorie générale des formes algébriques.* (Extrait des *Mémoires de l'Acad. royale des Lincei.*)

Sur un théorème de la Théorie générale des fonctions ;
par M. H. POINCARÉ.

(Séance du 18 mai 1883.)

Voici le théorème que je me propose de démontrer :

Soit y une fonction analytique quelconque de x , non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z .

Pour démontrer ce résultat, je me servirai du beau théorème de M. Schwarz (*Monatsberichte*, octobre 1870), connu sous le nom de *Principe de Dirichlet*. Voici quel en est l'énoncé :

Appelons ξ et η les parties réelle et imaginaire de x .

Étant donné un contour quelconque C sur un plan ou sur une surface de Riemann, on peut toujours trouver une fonction u de ξ et de η qui satisfasse à l'équation

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

qui reste holomorphe à l'intérieur de C et qui prenne des valeurs données le long de C .

Je dirai qu'une fonction u devient logarithmiquement infinie au point $\xi = a$, $\eta = b$ quand la différence

$$u \sim L \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2}$$

reste holomorphe dans le voisinage de ce point.

En vertu du théorème de M. Schwarz, on pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera à l'équation $\Delta u = 0$, qui prendra des valeurs données le long de C et qui restera holomorphe à l'intérieur de C , à l'exception de un ou plusieurs points donnés où elle deviendra logarithmiquement infinie.

Formation de la surface de Riemann S .

Considérons m fonctions de x ,

$$(1) \quad y_1, y_2, \dots, y_m,$$

analytiques, non uniformes en général. Ces fonctions seront complètement définies lorsque l'on connaîtra, non seulement la valeur de x , mais encore le chemin par lequel la variable x a atteint cette valeur en partant du point initial O .

Nous considérerons la variable x comme se mouvant non sur un plan, mais sur une surface de Riemann S . Cette surface sera formée de feuillets plans superposés comme dans les surfaces de Riemann, à l'aide desquelles on étudie les fonctions algébriques : seulement ici le nombre des feuillets sera infini.

Traçons dans le plan un contour fermé quelconque C partant d'un point initial x quelconque et revenant finir à ce même point x . La surface S sera complètement définie, si nous disons à quelles conditions le point initial et le point final de ce contour devront être regardés comme appartenant à un même feuillet ou à des feuillets différents.

Or il y a deux sortes de contours C :

1° Ceux qui sont tels que l'une au moins des m fonctions y ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x décrit le contour C ;

2° Ceux qui sont tels que les m fonctions y reviennent à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C .

Parmi les contours de la deuxième sorte, je distinguerai encore deux espèces :

1° C sera de la première espèce, si l'on peut, en déformant ce contour d'une façon continue, passer à un contour infinitésimal de telle façon que le contour ne cesse jamais d'être de la seconde sorte ;

2° C sera de la seconde espèce dans le cas contraire.

Eh bien, le point initial et le point final de C appartiendront à des feuilletts différents si ce contour est de la première sorte, ou de la seconde espèce de la seconde sorte. Ils appartiendront au même feuillet si C est de la première espèce de la seconde sorte (*voir* Note I, p. 125).

La surface de Riemann est alors complètement définie. Elle est simplement connexe et ne diffère pas, au point de vue de la Géométrie de situation, de la surface d'un cercle, d'une calotte sphérique ou d'une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes.

Définition des contours C.

Notre surface de Riemann S étant simplement connexe, nous pourrons y tracer une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O. Par chacun des points de la surface S (excepté par le point O) passera un de ces contours C et un seul.

Voici, d'ailleurs, comment on peut se rendre compte de la disposition de ces contours C. Considérons un cercle K ayant pour centre le point O et de rayon assez petit pour que les m fonctions y soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle et même sur sa circonférence. On tracera ensuite une infinité de cercles C intérieurs et concentriques à K. Des différents points de la circonférence de K comme centres nous décrirons des cercles K' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacun d'eux et sur sa circonférence. Soit K₁ la portion de l'enveloppe des cercles K' qui est extérieure à K. La portion des cercles K' qui est extérieure à K recouvrira une région annulaire limitée par K et K₁, et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K. Des divers points de K₁ comme centres, nous décrirons des cercles K'' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacun d'eux et sur sa circonférence. Soit K₂ la portion

de l'enveloppe des cercles K'' qui est extérieure à K_1 . La portion des cercles K'' qui est extérieure à K_1 couvrira une région annulaire limitée par K_1 et K_2 , et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K_1 , et ainsi de suite. On voit qu'on aura construit ainsi une infinité de contours fermés C , tels que par chaque point de la surface S passe un de ces contours et un seul.

Parmi ces contours C , j'en choisirai une infinité

$$C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$$

tels que C_{n+1} enveloppe C_n et que tout point de la surface de Riemann soit intérieur à un des contours C_n .

Définition de la fonction y_m .

Soient k le module d'une fonction elliptique, K et K' ses périodes. Définissons l'algorithme φ par la relation suivante :

$$\frac{K'}{K} = \varphi(k^2).$$

On sait que la fonction φ est holomorphe, sauf pour

$$k^2 = 0, \quad k^2 = 1, \quad k^2 = \infty,$$

et qu'elle ne peut prendre que des valeurs dont la partie imaginaire est positive.

Soit ψ une fonction de x définie par l'équation

$$\psi = \frac{\varphi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) - \sqrt{-1}}{\varphi\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) + \sqrt{-1}}.$$

La fonction ψ a son module constamment plus petit que 1, et elle est holomorphe, sauf pour (voir Note II, p. 125)

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x = -\frac{\delta}{\gamma}, \quad x = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma}.$$

Je supposerai de plus que β et δ aient été choisis de telle sorte

que

$$z\left(\frac{\xi}{2}\right) = \sqrt{-1}.$$

de telle façon que ψ s'annule pour $x = 0$.

Je supposerai que la fonction γ_m , la dernière du Tableau (1), soit précisément ψ . Si cela n'était pas, et si ψ ne faisait pas partie du Tableau (1), on l'y adjoindrait.

Posons maintenant

$$t = \log \bmod \frac{1}{\psi}.$$

La fonction t satisfera à l'équation $\Delta t = 0$. Elle sera essentiellement positive, et elle deviendra logarithmiquement infinie au point O et en divers autres points de la surface S, points que nous appellerons $O_1, O_2, \dots$.

Définition des fonctions u_n .

J'appellerai u_n une fonction qui est assujettie à satisfaire à l'équation $\Delta u_n = 0$, à s'annuler le long du contour C_n et à rester holomorphe à l'intérieur de ce contour, sauf au point O où elle devient logarithmiquement infinie.

Pour étudier les propriétés de cette fonction, je m'appuierai sur le théorème suivant, bien connu :

Si une fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, si elle est positive le long d'un contour C; si de plus, en tous les points intérieurs à ce contour, elle est ou holomorphe ou logarithmiquement infinie, elle sera positive en tous les points intérieurs au contour C.

De là, on déduit que les fonctions $u_n, u_{n+1} - u_n$ et $t - u_n$ sont positives à l'intérieur du contour C_n .

Ainsi, en un point quelconque de la surface de Riemann S, la fonction u_n est constamment croissante avec n et constamment plus petite que t . Elle tend donc vers une limite finie u quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, la série

$$(2) \quad u = u_1 + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n) + \dots$$

est convergente.

Emploi des fonctions t_i .

Cette démonstration ne s'appliquerait pas aux points $O_1, O_2, \dots$ où la fonction t devient infinie pendant que u_n reste finie. En effet, t devenant infinie, nous n'aurions plus de limite supérieure pour u_n . Considérons, par exemple, le point O_i et de ce point comme centre décrivons un cercle K_i ne contenant aucun autre point singulier. On pourra construire une fonction t_i qui satisfera à l'équation $\Delta t_i = 0$, qui deviendra égale à t le long de K_i , et qui sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. Cela posé, la fonction $t_i - u_n$ sera positive à l'intérieur de K_i ; par conséquent, même au point O_i , nous aurons une limite supérieure de u_n , qui sera t_i .

Continuité de la fonction u .

Il faut démontrer maintenant que u est une fonction continue de ξ et de η . Pour cela, je m'appuierai sur le théorème suivant, facile à démontrer :

Si u est fonction de ξ et de η qui, à l'intérieur d'un cercle K de rayon R , satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et reste constamment comprise entre 0 et A (A étant une constante positive), ses dérivées $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta}$ à l'intérieur d'un cercle k de rayon r et concentrique à K resteront plus petites en valeur absolue que

$$\frac{4AR^2}{(R-r)^2}.$$

Considérons donc deux cercles concentriques quelconques K et k ne contenant aucun point singulier. Soit A la plus grande valeur que puisse prendre la fonction t à l'intérieur de K , nous aurons à l'intérieur de k (et cela quel que soit n)

$$\left| \frac{du_n}{d\xi} \right| < \frac{4AR^2}{(R-r)^2} > \left| \frac{du_n}{d\eta} \right|.$$

Considérons maintenant deux points x' et x'' , situés à l'intérieur de k , et soient u'_n et u''_n , u' et u'' les valeurs correspondantes de u_n et de u . Je dis que l'on pourra prendre la distance ρ des points x'

et r'' assez petite pour que l'on ait

$$| u' - u'' | < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε .

En effet, nous aurons, quel que soit n ,

$$| u'_n - u''_n | < \frac{4AR^2\sqrt{2}}{(R-r)^2} \rho''.$$

Nous pourrions donc toujours prendre ρ assez petit pour que l'on ait, quel que soit n ,

$$| u'_n - u''_n | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les points x' et x'' sont alors déterminés. Nous pourrions prendre alors n assez grand pour que

$$| u' - u'_n | < \frac{\varepsilon}{3}, \quad | u'' - u''_n | < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors

$$| u' - u'' | < \varepsilon,$$

C. Q. F. D.

Ainsi u est une fonction continue de ξ et de η .

Uniformité de la convergence.

Nous avons vu que la série (2) est convergente, mais cela ne suffirait pas pour ce que nous avons en vue; il faut encore faire voir qu'elle est uniformément convergente (*gleichmässig*). En d'autres termes, il faut montrer qu'autour de chacun des points de la surface de Riemann S on peut trouver une région P jouissant de la propriété suivante; on pourra prendre n assez grand pour que la différence $u - u_n$ reste plus petite que ε à l'intérieur de la région P , et cela quelque petit que soit ε . Pour cela, il suffit de montrer qu'on peut toujours prendre n assez grand pour que la différence $u_{n+p} - u_n$ reste plus petite qu'une quantité donnée ε pour tous les points de P et quel que soit le nombre positif p .

En effet, prenons pour région P un carré intérieur au cercle k , et dont les côtés soient parallèles aux axes des ξ et des η .

Soit l le côté du carré. Partageons le carré P en h^2 carrés égaux par $h-1$ parallèles équidistantes menées à chacun de ces côtés;

les côtés de ces petits carrés seront $\frac{l}{h}$. Considérons un quelconque de ces petits carrés; soient x' le centre de ce petit carré et x'' un point quelconque intérieur à ce même petit carré; on aura

$$\text{mod}(x' - x'') < \frac{l}{h\sqrt{2}}.$$

Soient $u', u''; u'_n, u''_n; u'_{n+p}, u''_{n+p}$ les valeurs correspondantes de u, u_n et u_{n+p} ; je dis qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon.$$

Cela suffira pour démontrer le théorème énoncé, puisque x'' est un point quelconque du carré P.

On aura évidemment, quels que soient n et p ,

$$| u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n | < \frac{8AR^2}{(R-r)^2} \frac{l}{h}.$$

On pourra donc prendre le nombre entier h assez grand pour que l'on ait, quels que soient n et p ,

$$| u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le nombre h est désormais déterminé. Formons la somme des h^2 quantités $u'_n, \Sigma u'_n$: elle aura évidemment pour limite $\Sigma u'$; on pourra donc prendre n assez grand pour que

$$\Sigma u' - \Sigma u'_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura alors

$$u'_{n+p} - u'_n < u' - u'_n < \Sigma(u' - u'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, enfin,

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon. \quad \text{c. q. f. d.}$$

La série (2) est donc uniformément convergente.

Propriétés de la fonction u .

Je dis que la fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et est holomorphe si ce n'est au point O . En effet, considérons un contour c quelconque intérieur à P . La fonction u étant continue, nous pourrions construire une fonction U holomorphe à l'intérieur de c et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\Delta U = 0 \text{ à l'intérieur de } c, \quad U = u \text{ le long de } c.$$

Nous pourrions toujours prendre u assez grand pour que $u - u_n$ reste plus petit que ε le long de c . On aura alors

$$U - u_n < \varepsilon$$

le long de c et, par conséquent, à l'intérieur de c . On aura donc

$$U = \lim u_n \quad \text{pour } n = \infty$$

ou

$$U = u.$$

Il suit de là que la fonction u est holomorphe comme U et satisfait à l'équation $\Delta u = 0$.

La démonstration précédente ne s'appliquerait pas au cas où l'un des points O_i se trouverait à l'intérieur du cercle K , car alors la fonction t deviendrait infinie à l'intérieur de ce cercle; mais on tournerait la difficulté en remplaçant t par t_i . Il n'y aurait rien d'ailleurs à changer aux démonstrations précédentes, il n'y aurait qu'à changer partout t en t_i . Ainsi la fonction u est holomorphe, même aux points $O_1, O_2, \dots$.

On démontrerait de même que la fonction u devient logarithmiquement infinie au point O .

Considérons un cercle K' de rayon R' intérieur au carré P , et un cercle k' de rayon r' intérieur et concentrique à K' . On pourra toujours prendre n assez grand pour que

$$u - u_n < \varepsilon$$

pour tous les points intérieurs à K' . On aura alors, à l'intérieur de k' ,

$$\left| \frac{du}{dz} - \frac{du_n}{dz} \right| \leq \frac{\varepsilon R'^2}{(R' - r')^2} \quad \left| \frac{du}{dz} - \frac{du_n}{dz} \right|.$$

Donc on peut prendre n assez grand pour que les valeurs absolues des différences $\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\tau_1} - \frac{du_n}{d\tau_1}$ soient plus petites qu'une quantité donnée α pour tous les points intérieurs à k' .

Considérons maintenant une région quelconque G : je dis qu'on pourra prendre n assez grand pour que les inégalités

$$(3) \quad \left| \frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi} \right| < \alpha < \left| \frac{du}{d\tau_1} - \frac{du_n}{d\tau_1} \right|$$

subsistent pour tous les points de G . En effet, nous pourrions décomposer la région G en un nombre fini de régions partielles assez petites pour que chacune d'elles soit contenue dans un cercle tel que k' ; alors nous pourrions prendre n assez grand pour que, dans chacune de ces régions partielles, les inégalités proposées soient satisfaites. En donnant à n la plus grande des valeurs ainsi obtenues, les inégalités auront lieu dans toute la région G .

En d'autres termes, les séries

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\xi} + \left(\frac{du_2}{d\xi} - \frac{du_1}{d\xi} \right) + \dots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi} \right) + \dots, \\ \frac{du_1}{d\tau_1} + \left(\frac{du_2}{d\tau_1} - \frac{du_1}{d\tau_1} \right) + \dots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\tau_1} - \frac{du_n}{d\tau_1} \right) + \dots \end{aligned}$$

sont *uniformément convergentes* et ont pour sommes $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\tau_1}$.

Définition des fonctions v et v_n .

Nous définirons les fonctions v et v_n par les équations

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= -\frac{du}{d\tau_1}, & \frac{dv}{d\tau_1} &= \frac{du}{d\xi}, \\ \frac{dv_n}{d\xi} &= -\frac{du_n}{d\tau_1}, & \frac{dv_n}{d\tau_1} &= \frac{du_n}{d\xi}. \end{aligned}$$

Ces équations sont compatibles à cause des relations

$$\Delta u = \Delta u_n = 0.$$

Nous achèverons de définir les fonctions v et v_n en leur imposant de s'annuler pour un certain point A de la surface S , différent du point O . Les fonctions v et v_n , si M est le point (ξ, τ_1) , seront

alors définies par les intégrales

$$v = \int_A^M \left(\frac{du}{d\xi} dr_1 - \frac{du}{dr_1} d\xi \right), \quad v_n = \int_A^M \left(\frac{du_n}{d\xi} dr_1 - \frac{du_n}{dr_1} d\xi \right).$$

Reprenons la région G, et appelons L le plus grand chemin qu'il faut parcourir sur la surface S pour aller du point A à un point quelconque de G; supposons qu'on ait pris n assez grand pour que les inégalités (3) soient satisfaites; on aura alors

$$|v - v_n| < 2\alpha L.$$

ce qui prouve que la série

$$v_1 + (v_2 - v_1) + \dots + (v_{n+1} - v_n) + \dots$$

est uniformément convergente et a pour somme v .

Définition des fonctions z et z_n .

Nous poserons

$$z = e^{-(u+iv)}, \quad z_n = e^{-(u_n+iv_n)}.$$

Les fonctions v et v_n n'étaient pas entièrement déterminées, car, selon le chemin que l'on prend pour aller de A en M, les valeurs de v , par exemple, peuvent différer d'un multiple de 2π . Si, par exemple, on revient au point A après avoir tourné k fois autour du point O, on a

$$v = v_n = 2k\pi.$$

Au contraire, les fonctions z et z_n sont parfaitement déterminées. On aura

$$\frac{dz}{dx} = \left(-\frac{du}{d\xi} + i \frac{du}{dr_1} \right) e^{-(u+iv)}, \quad \frac{dz_n}{dx} = \left(-\frac{du_n}{d\xi} + i \frac{du_n}{dr_1} \right) e^{-(u_n+iv_n)}$$

ou, en posant $u + iv = \omega$, $u_n + iv_n = \omega_n$,

$$z = e^{-\omega}, \quad z_n = e^{-\omega_n}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{d\omega}{dx} e^{-\omega}, \quad \frac{dz_n}{dx} = -\frac{d\omega_n}{dx} e^{-\omega_n}.$$

Nous pouvons prendre n assez grand pour qu'à l'intérieur de la

région G on ait à la fois

$$|\omega - \omega_n| \leq \varepsilon, \quad \left| \frac{d\omega}{dx} - \frac{d\omega_n}{dx} \right| \leq \alpha,$$

α et ε étant deux quantités données.

Je dis que si l'on considère un point de G où

$$z \gg a,$$

on pourra prendre n assez grand pour que

$$\left| \frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n-a} \right| < \delta,$$

δ étant une quantité donnée. En effet, on aura identiquement

$$\frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n-a} = \frac{\frac{d\omega_n}{dx} - \frac{d\omega}{dx}}{1 - \frac{a}{z}} + a \frac{d\omega_n}{dx} \frac{z - z_n}{(z-a)(z_n-a)};$$

d'où, si n est assez grand,

$$(1) \quad \left| \frac{\frac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n-a} \right| < \frac{\alpha}{\text{mod} \left(1 - \frac{a}{z} \right)} + \text{mod } a \left(\text{mod} \frac{d\omega}{dz} + \alpha \right) \frac{\varepsilon}{\text{mod}(z-a) [\text{mod}(z-a) - \varepsilon]}.$$

Et il est évident qu'on peut prendre ε et α assez petits pour que le second membre soit aussi petit que l'on veut.

Propriétés des fonctions z et z_n .

Il est évident, d'après la définition de la fonction z_n , que cette fonction ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur à l'intérieur du contour C_n . Si donc on prend l'intégrale

$$\int \frac{\frac{dz_n}{dx} dx}{z_n - a},$$

le long d'un contour fermé intérieur à C_n , on aura pour résultat zéro ou $2i\pi$.

Je dis maintenant que la fonction z ne peut prendre deux fois la même valeur. Supposons, en effet, qu'elle prenne la valeur a en deux points B et C; on pourrait toujours construire une région G contenant les points B et C, et ne contenant ni le point O, ni aucun point (autre que B et C) où la fonction z devienne égale à a . On pourrait alors trouver une limite supérieure du module de $\frac{d\omega}{dz}$ et une limite inférieure du module de $z - a$ quand le point x est assujéti à rester sur le périmètre de G; soient λ et μ ces deux limites. On aura aussi

$$\text{mod} \left(1 - \frac{a}{z} \right) > \mu,$$

puisque le module de z est essentiellement plus petit que 1.

On aura donc, en désignant par L la longueur du périmètre de G et en nous reportant à l'inégalité (4),

$$\left| \int \left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz_n}{z_n-a} \right) dx \right| < \left[\frac{\lambda}{\mu} + \text{mod } a(\lambda + \alpha) \frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)} \right] L,$$

l'intégrale étant prise le long du périmètre de G.

Il s'ensuit qu'on peut prendre n assez grand pour que la valeur absolue de la différence des deux intégrales

$$\int \frac{dz}{z-a} dx, \quad \int \frac{dz_n}{z_n-a} dx$$

soit aussi petite que l'on veut; or cela est absurde, puisque, si n est assez grand pour que le contour C_n enveloppe G, la première intégrale devrait être égale à $4i\pi$ et la seconde à $2i\pi$ ou à zéro.

L'hypothèse faite au début doit donc être rejetée, et, par conséquent, la fonction z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur. A une valeur de z ne pourra donc correspondre qu'un seul point de la surface S, et par conséquent un seul système de valeurs des fonctions $y_1, y_2, \dots, y_m, x$, puisque la surface S a été construite de telle façon que ces fonctions ne puissent avoir qu'une seule valeur en chacun des points de cette surface.

Il résulte de là que $y_1, y_2, \dots, y_m$ et x sont des fonctions uniformes de z .

C. Q. F. D.

NOTE I.

Il résulte de la manière dont cette surface S a été construite qu'autour de chaque point singulier viennent s'échanger une infinité de feuilletts. Nous ne regarderons pas un point singulier comme faisant partie de la surface de Riemann, mais seulement de sa frontière; ainsi, quand nous dirons plus loin que tout point de la surface de Riemann est intérieur à l'un des contours C_n , il va sans dire que tous les points singuliers restent en dehors de tous les contours C_n .

Il résulte, en outre, de la façon dont la surface a été construite, que x et que les fonctions y , leurs intégrales, les intégrales de leurs intégrales, etc., ne peuvent prendre qu'une seule valeur en chacun des points de la surface S .

NOTE II.

Les points $-\frac{\beta}{\alpha}$, $-\frac{\delta}{\gamma}$ et $\frac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$, étant des points singuliers, sont en dehors de la surface de Riemann.

Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe; par M. K. BOBEK (Assistant à l'École Polytechnique de Prague).

(Séance du 6 juillet 1883.)

Je crois que l'on n'a pas encore remarqué que la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe est composée de deux courbes gauches du quatrième degré de seconde espèce, respectivement pour chaque série de génératrices; une courbe coupant les droites de la série correspondante en un point, qui est le point central, et les droites de l'autre série en trois points.

Voici comment on le peut démontrer. Soient

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'hyperboloïde et

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

l'équation de son cône asymptotique Q. Menons par la génératrice g de l'hyperboloïde le plan G qui est normal au plan G' passant par g et tangent au cône Q.

Le point a de contact du plan G est le point central de la génératrice g . Soient y la génératrice du cône Q parallèle à g et $\mathfrak{E}$ le plan qui passe par y et qui est normal au cône. $\mathfrak{E}$ est alors parallèle à G et celui-ci touche par conséquent l'hyperboloïde au point a qui se trouve sur le rayon conjugué du plan $\mathfrak{E}$ à l'égard du cône. Mais le plan $\mathfrak{E}$ a pour équation

$$-\frac{x}{x}\xi + \frac{3}{y}\eta + \frac{7}{z}\zeta = 0.$$

Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point de $\mathfrak{E}$ et

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \\ y = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}, \\ z = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}; \end{cases}$$

le rayon conjugué aura pour équations

$$(4) \quad \begin{cases} \rho\xi = -\frac{a^2x}{x}, \\ \rho\eta = \frac{b^2y}{y}, \\ \rho\zeta = -\frac{c^2z}{z}. \end{cases}$$

Pour les points d'intersection avec l'hyperboloïde, on trouve

$$(5) \quad \rho = \pm \sqrt{\frac{a^2x^2}{x^2} + \frac{b^2y^2}{y^2} - \frac{c^2z^2}{z^2}},$$

x, y, z étant liés par l'équation (2).

Le lieu de tous les rayons (4) est un cône du quatrième degré, qui a les axes de l'hyperboloïde pour génératrices doubles. Son

équation est

$$(6) \quad \frac{a^2 x^2}{\xi^2} + \frac{b^2 \beta^2}{\gamma^2} - \frac{c^2 \gamma^2}{z^2} = \gamma^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = 0.$$

La ligne de striction paraît être du huitième degré ; mais je veux montrer qu'elle se décompose.

En joignant les deux points dont les coordonnées sont (ξ, γ, ζ) , $(-\xi, -\gamma, \zeta)$ par la droite qui a pour équations

$$\begin{aligned} x &= \mu \xi, \\ \gamma &= \mu \gamma, \\ z &= \zeta, \end{aligned}$$

on obtient, en vertu des équations (1) et (5),

$$\begin{aligned} \mu^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} \right) - \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) &= 0, \\ \mu^2 \frac{c^2 \gamma^2}{z^2} - \left(\frac{a^2 x^2}{x^2} + \frac{b^2 \beta^2}{\gamma^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

et, en éliminant le paramètre arbitraire μ^2 ,

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} \right) \left(\frac{a^2 x^2}{x^2} + \frac{b^2 \beta^2}{\gamma^2} \right) - \frac{c^2 \gamma^2}{z^2} \left(1 + \frac{z^2}{c^2} \right) = 0.$$

Or, en égard à la relation $\beta + \gamma = z$, on a l'identité

$$x^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2 x \beta,$$

et la dernière équation devient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{ax}{b} \frac{\gamma}{x} + \frac{b\beta}{a} \frac{x}{\gamma} \right)^2 - \frac{c^2 \gamma^2}{z^2} \\ &= \left(\frac{ax}{b} \frac{\gamma}{x} + \frac{b\beta}{a} \frac{x}{\gamma} - \frac{c\gamma}{z} \right) \left(\frac{ax}{b} \frac{\gamma}{x} + \frac{b\beta}{a} \frac{x}{\gamma} + \frac{c\gamma}{z} \right) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne les deux surfaces réglées du troisième ordre

$$\begin{aligned} C_z &= (a^2 x \gamma^2 + b^2 \beta x^2) z - abc \gamma xy = 0, \\ D_z &= (a^2 x \gamma^2 + b^2 \beta x^2) z + abc \gamma xy = 0, \end{aligned}$$

qui passent chacune par deux droites de l'hyperboloïde, à savoir :

$$\begin{aligned} C_z \text{ par les droites } \frac{\gamma}{x} &= -i \frac{b}{a}, \quad z = +ic & \text{ et } & \frac{\gamma}{x} = -i \frac{b}{a}, \quad z = -ic, \\ D_z \text{ par les droites } \frac{\gamma}{x} &= -i \frac{b}{a}, \quad z = -ic & \text{ et } & \frac{\gamma}{x} = +i \frac{b}{a}, \quad z = +ic. \end{aligned}$$

et qui coupent par conséquent l'hyperboloïde suivant des courbes du quatrième degré de seconde espèce.

Soient C_4 et D_4 les courbes d'intersection de C_z et de D_z avec l'hyperboloïde; on trouve alors que les surfaces réglées

$$C_x \quad (b^2 \beta z^2 + c^2 \gamma y^2)x - abc \alpha xy = 0,$$

$$C_y \quad (c^2 \gamma x^2 - a^2 \alpha z^2)y - abc \beta xz = 0$$

passent aussi par la courbe C_4 et que les surfaces

$$D_x \quad (b^2 \beta z^2 + c^2 \gamma y^2)x + abc \alpha xy = 0,$$

$$D_y \quad (c^2 \gamma x^2 - a^2 \alpha z^2)y + abc \beta xz = 0$$

passent par la courbe D_4 . Les génératrices d'intersection de ces surfaces avec l'hyperboloïde sont :

$$\text{Pour } C_x \text{ les droites... } \frac{y}{z} = + \frac{b}{c}, \quad x = -a; \quad \frac{y}{z} = - \frac{b}{c}, \quad x = -a,$$

$$\text{Pour } C_y \text{ les droites... } \frac{x}{z} = + \frac{a}{c}, \quad y = -b; \quad \frac{x}{z} = - \frac{a}{c}, \quad y = +b,$$

$$\text{Pour } D_x \text{ les droites... } \frac{y}{z} = - \frac{b}{c}, \quad x = +a; \quad \frac{y}{z} = + \frac{b}{c}, \quad x = +a,$$

$$\text{Pour } D_y \text{ les droites... } \frac{x}{z} = - \frac{a}{c}, \quad y = -b; \quad \frac{x}{z} = + \frac{a}{c}, \quad y = +b.$$

La courbe C_4 appartenant comme ligne de striction à la série (g) des génératrices de l'hyperboloïde, les droites qui ont les surfaces C_z, C_x, C_y communes avec l'hyperboloïde appartiennent à la même série (g) , tandis que les autres droites mentionnées sont de la seconde série (g') .

En vertu de cette décomposition de la courbe du huitième degré en deux courbes du quatrième degré, il est nécessaire que la racine carrée (δ) s'exprime rationnellement.

Posons, en effet,

$$x = \gamma a \sin \varphi,$$

$$y = \gamma b \cos \varphi,$$

$$z = \gamma c;$$

soient γ et φ deux paramètres arbitraires; les coordonnées x, y, z

satisfont toujours à l'équation (2), et l'on a

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 \cos^2 \varphi + \beta^2 \sin^2 \varphi - \gamma^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\gamma^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi} = \left(\frac{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}{\gamma \sin \varphi \cos \varphi} \right)^2,$$

eu égard à l'identité $\beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2 = -2\alpha\gamma$.

Les équations de la courbe C_4 sont alors

$$\xi = -\frac{\alpha \alpha \cos \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}, \quad \eta = \frac{b \beta \sin \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}, \quad \zeta = -\frac{c \gamma \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi},$$

et celles de la courbe D_4

$$\xi = \frac{\alpha \alpha \cos \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}, \quad \eta = -\frac{b \beta \sin \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}, \quad \zeta = \frac{c \gamma \cos \varphi \sin \varphi}{\alpha - \gamma \sin^2 \varphi}.$$

En posant $\tan^2 \frac{1}{2} \varphi = t$, on mettra en évidence le degré de la courbe; il vient en effet

$$\xi = \mp \frac{\alpha \alpha (1 - t^2) (1 + t^2)}{\alpha (1 + t^2)^2 - 4 \gamma t^2},$$

$$\eta = \pm \frac{2 b \beta t (1 + t^2)}{\alpha (1 + t^2)^2 - 4 \gamma t^2},$$

$$\zeta = \mp \frac{2 c \gamma t (1 - t^2)}{\alpha (1 + t^2)^2 - 4 \gamma t^2},$$

le signe supérieur correspondant à la C_4 et le signe inférieur à la D_4 .

Les projections de cette courbe gauche et les relations métriques se calculent aisément au moyen des formules données.

Sur les fonctions Θ ; par M. H. POINCARÉ.

(Séance du 20 juillet 1883).

Considérons une fonction Θ à n variables

$$\Theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Sigma e^{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n},$$

φ représentant une forme quadratique par rapport aux n nombres entiers $m_1, m_2, \dots, m_n$. Considérons ensuite n^2 constantes quelconques

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n},$$

$$a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}.$$

Si nous écrivons, pour abrégér.

$$\Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_1 - a_{11}, x_2 - a_{12}, \dots, x_n - a_{1n}),$$

et que nous considérons les n équations simultanées

$$(1) \quad \Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_i - a_{2i}) = \dots = \Theta(x_i - a_{ni}) = 0,$$

on peut se demander combien ces équations ont de systèmes de solutions communes. Je ne considère pas, bien entendu, comme distinctes les solutions congruentes, c'est-à-dire celles qui ne diffèrent entre elles que par des multiples des périodes.

Le problème est résolu dans le cas de $n = 1$, c'est-à-dire dans le cas particulier des fonctions elliptiques; mais je ne crois pas qu'il le soit encore dans le cas général des fonctions abéliennes.

Dans le cas des fonctions elliptiques, la forme φ se réduit à un seul terme

$$x_1 m_1^2,$$

et la fonction Θ à la série

$$\sum e^{2\pi i m_1^2 + m_1 x_1}.$$

Les équations (1) se réduisent à l'équation unique

$$(2) \quad \Theta(x_1 - a_{11}) = 0,$$

et cette équation n'admet qu'une solution.

Pour le démontrer, on se sert de la formule de Cauchy qui sert à calculer le nombre des racines d'une équation qui sont intérieures à un contour donné, et l'on applique cette formule au parallélogramme des périodes.

Depuis, M. Kronecker a généralisé la formule de Cauchy de manière à exprimer sous la forme d'une intégrale multiple définie le nombre des solutions communes à un système de n équations à n inconnues, lorsqu'on assujettit ces solutions à être comprises dans un domaine donné.

Malheureusement cette formule ne se prête pas, comme on pourrait le croire au premier abord, à la généralisation immédiate de l'analyse qui donne le nombre des solutions de l'équation (2).

En revanche, elle peut nous conduire indirectement à la solution du problème qui nous occupe. En effet, le nombre cherché des solutions des équations (1) ne pourrait dépendre que des périodes, c'est-à-dire des coefficients de la forme quadratique φ ,

et je vais démontrer qu'il en est indépendant. Pour obtenir le nombre des solutions distinctes des équations (1), il faut chercher le nombre des solutions comprises dans le *prismatoïde* des périodes, pour nous servir d'une expression qu'a employée, pour la première fois, l'illustre géomètre de Berlin que nous citons en ce moment (*Comptes rendus: Des unités complexes*, 1883). C'est donc à ce prismatoïde qu'il faut appliquer l'intégrale de M. Kronecker. Je dis que cette intégrale qui nous donne le nombre cherché est indépendante des coefficients de ζ .

En effet, considérons d'une manière générale l'intégrale de M. Kronecker, appliquée à un système d'équations quelconque et à un domaine quelconque, et supposons que ces équations dépendent de certains paramètres variables. L'intégrale ne pourra cesser d'être une fonction continue de ces paramètres que si l'expression sous le signe $\int$ devient infinie pour un point de la périphérie du domaine considéré. Or cela ne peut arriver que si une des solutions du système d'équations données se trouve sur cette périphérie. Mais notre intégrale représente un nombre positif essentiellement entier, de sorte que, toutes les fois qu'elle sera une fonction continue des paramètres envisagés, elle sera *constante*. Ainsi l'intégrale ne peut varier que si une solution entre dans le domaine ou si elle en sort.

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, en admettant qu'une solution sorte du prismatoïde des périodes, il faudra, en vertu de la périodicité même, qu'une autre solution y entre au même instant, de sorte que l'intégrale de M. Kronecker ne peut jamais varier.

Il suffira donc de résoudre le problème dans un cas particulier pour l'avoir résolu dans le cas général. Or cela est aisé, car nous n'avons qu'à supposer

$$\zeta = x_1 x_1^2 + x_2 x_2^2 + \dots + x_n x_n^2$$

et, en posant alors

$$\theta_i(x_i) = \sum e^{\alpha_i x_i^2 + m_i x_i},$$

on aura

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_n.$$

de sorte que la fonction Θ se réduira à un produit de fonctions θ elliptiques.

Les équations (1) se ramènent alors à un certain nombre d'équations de la forme (2), et il est aisé de voir qu'elles admettent $n!$ solutions distinctes. Ainsi, si le nombre des variables est égal successivement à 1, 2, 3, 4, ..., le nombre des solutions des équations (1) sera de 1, 2, 6, 24, ...

Une autre application du même principe va maintenant nous permettre de résoudre un problème un peu plus général.

Considérons un système de $n \times p \times k$ constantes que nous désignerons par la notation

$$a_{ijh},$$

l'indice i variant depuis 1 jusqu'à p , l'indice j depuis 1 jusqu'à n , et l'indice h depuis 1 jusqu'à k . Supposons que l'on ait entre ces quantités les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{i=p} a_{ij1} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ij2} = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ij3} = \dots = \sum_{i=1}^{i=p} a_{ijk}.$$

et cela quel que soit l'indice j .

Soient de plus $A_1, A_2, \dots, A_k$ k constantes tout à fait quelconques, et posons

$$H = \sum_{h=1}^{h=k} A_h \prod_{i=1}^{i=p} \Theta(x_j - a_{ijh}).$$

Nous dirons que H est une fonction homogène et de degré p . Cela posé, envisageons n fonctions homogènes

$$H_1, H_2, \dots, H_n$$

respectivement de degré $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Quel est le nombre des systèmes de valeurs des x qui annulent à la fois ces n fonctions? Le même raisonnement que nous venons de faire montre que ce nombre est constant et indépendant, par exemple, des quantités A_h .

Or, dans le cas où les fonctions H se réduisent à des produits de fonctions Θ , ce nombre est égal à

$$(3) \quad n! \times p_1 p_2 \dots p_n.$$

Tel est donc le nombre cherché.

Il est à remarquer qu'il peut arriver que les n équations

$$H_1 = H_2 = \dots = H_n = 0$$

ne soient pas distinctes, c'est-à-dire qu'elles aient, outre un nombre de solutions communes *isolées*, toujours inférieures à l'expression (3), une infinité de solutions communes non isolées les unes des autres.

C'est en particulier ce qui arrive dans le problème de l'inversion de Jacobi, tel qu'on le traite ordinairement.

Demandons-nous maintenant combien il y a de fonctions

$$\Theta(x_i - a_i)$$

qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs de x_i .

Je représenterai ces n systèmes par la notation

$$x_i = b_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n).$$

Nous aurons alors à résoudre les n équations

$$(4) \quad \Theta(b_{i1} - a_i) = \Theta(b_{i2} - a_i) = \dots = \Theta(b_{in} - a_i) = 0$$

par rapport aux a_i .

Ces équations, d'après ce qui précède, ont $n!$ solutions communes. Il existe donc $n!$ fonctions Θ qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs des x .

Si $n > 2$, on a

$$n! > n.$$

Il en résulte que les $n!$ solutions communes des équations (1) ne sont pas indépendantes et qu'il y a entre elles $n! - n$ relations. La connaissance de n d'entre elles suffit pour faire connaître les autres.

Mais, pour se rendre compte de la complication des relations envisagées, il suffit de chercher quel est le nombre des systèmes de $n! - n$ solutions complémentaires qui correspondent à un même système de n solutions données.

On pourra construire $n!$ fonctions Θ qui s'annuleront pour les n solutions données; on en choisira n quelconques; ce choix pourra se faire de

$$(5) \quad N = \frac{(n! - 1)!}{(n! - n)!}$$

manières. A chacune des combinaisons de n fonctions Θ correspondra un système de $n! - n$ solutions complémentaires. Le nombre de ces systèmes sera donc donné par l'expression (5).

Ce nombre croît très rapidement: pour $n = 3, 4, 5, 6, \dots$, on aura successivement

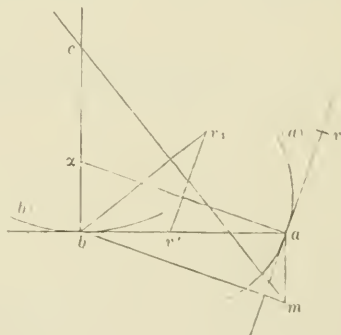
$$N = 20, \quad N = 10626, \quad N > 10^8, \quad N > 10^{14}.$$

Sur le centre de courbure des courbes de poursuite;
par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 20 juillet 1883.)

Le point a décrit une certaine courbe (a); sa vitesse est av , à l'instant considéré.

Le point b , dont la vitesse peut, d'ailleurs, varier d'une façon quelconque, est astreint à la condition de se diriger constamment



sur le point a ; ce point décrit une courbe (b) dite *de poursuite*. Soit, à l'instant considéré, bv la vitesse du point b .

Le théorème qui fait l'objet de la présente Note est le suivant :

THÉORÈME. — *Les perpendiculaires menées par chacun des deux points à la vitesse de l'autre se coupent en un point. La perpendiculaire abaissée de ce point sur la résultante des deux vitesses passe par le centre de courbure de la courbe de poursuite.*

La démonstration est des plus faciles.

Soit c le centre de courbure de la courbe de poursuite (b); la droite ab touchant son enveloppe au point b et la normale à la courbe (a) coupant au point z la normale à la courbe (b), on a

$$\frac{d(a)}{d(b)} = \frac{az}{bc}$$

ou, en divisant dans le premier membre, haut et bas, par dt ,

$$\frac{av}{bv'} = \frac{az}{bc}.$$

Par le point a , élevons à la vitesse bv' la perpendiculaire am ; du point b , abaissons sur la vitesse av la perpendiculaire bm ; nous avons

$$az = bm.$$

D'ailleurs, construisons en un point quelconque, le point b par exemple, la résultante bv_1 des vitesses bv' et $v'v_1$ égale et parallèle à av . L'égalité écrite plus haut devient

$$\frac{v'v_1}{bv'} = \frac{bm}{bc},$$

et, comme les angles $bv'v_1$ et mbc sont égaux, leurs côtés étant perpendiculaires, il en résulte que les triangles $bv'v_1$ et mbc sont semblables. Les côtés homologues $v'v_1$ et bm , bv' et bc de ces triangles étant perpendiculaires, il en sera de même des troisièmes côtés bv_1 et mc , et le théorème est démontré.

On peut remarquer, d'après ce théorème, que la courbure de la courbe de poursuite (b) n'est point liée à la courbure de la courbe (a); elle ne dépend que des vitesses des points a et b .

Le même théorème a lieu pour le second cas des courbes de poursuite, celui des trois points a , b , c se poursuivant, c'est-à-dire se déplaçant de façon que a se dirige constamment sur b , b sur c et c sur a .

Sur les fonctions entières; par M. H. POINCARÉ.

(Séance du 20 juillet 1883.)

Lorsqu'une série développée suivant les puissances de x est convergente pour toutes les valeurs de cette variable, elle définit une fonction entière; mais on peut aussi mettre une pareille fonction sous la forme du produit d'une infinité de facteurs primaires, comme le fait M. Weierstrass. Un facteur primaire est une expression de la forme

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{P(x)},$$

$P(x)$ étant un polynôme entier en x , et le facteur est de genre n , si $P(x)$ est de degré n .

Une fonction entière est alors de genre n si elle ne contient que des facteurs de genre n ou de genre inférieur.

Bien des questions se posent au sujet de cette classification des fonctions entières; on peut se demander, par exemple :

1° *Si la somme de deux fonctions de genre n est aussi de genre n ;*

2° *Si la dérivée d'une fonction de genre n est aussi de genre n ;*

Ces théorèmes, en admettant qu'ils soient vrais, seraient très difficiles à démontrer. Je crois que je serai utile à ceux qui en chercheront plus tard la démonstration en publiant quelques résultats sur la façon dont se comportent à l'infini les fonctions de genre n .

Leurs propriétés à cet égard dépendent en effet, dans une certaine mesure, de leur genre. Par exemple, si l'on considère une fonction entière dont tous les zéros soient réels positifs, et que l'on fasse tendre x vers l'infini par valeurs réelles négatives, la fonction tendra vers l'infini si elle est de genre 0, et vers zéro si elle est de genre 1. Voici d'autres propriétés analogues :

Considérons une transcendante de genre zéro

$$F(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{a_v}\right),$$

et supposons que x tende vers l'infini avec un argument déterminé; soit α un nombre, aussi petit que l'on voudra, mais d'argument tel que

$$\lim e^{\alpha x} = 0.$$

Je dis que

$$\lim F(x) e^{\alpha x} = 0.$$

En effet, posons

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \dots$$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ ayant même argument que α), d'où

$$e^{\alpha x} F(x) = \Pi \left[e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) \right].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right)$$

reste plus petit que 1 quand x varie de zéro à l'infini en conservant l'argument que nous lui avons attribué? Nous pouvons toujours supposer que $\alpha_\nu x$ est réel et négatif, sans quoi on se bornerait à la partie réelle de $\alpha_\nu x$, la partie imaginaire ne devant rien changer au module.

Cela posé, il faut satisfaire à l'inégalité

$$(1) \quad \alpha_\nu x + \text{partie réelle } L \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) < 0.$$

Or

$$\text{partie réelle } L \left(1 - \frac{x}{a_\nu} \right) < L \left(1 + \text{mod } \frac{x}{a_\nu} \right) < \text{mod } \frac{x}{a_\nu},$$

de sorte que l'inégalité (1) sera satisfaite si l'on a

$$(2) \quad \text{mod } \alpha_\nu > \text{mod } \frac{1}{a_\nu}.$$

On peut choisir les α_ν de telle sorte que, pour toutes les valeurs de ν supérieures à une certaine limite k , cette inégalité soit satisfaite.

On a alors

$$e^{ax} F(x) = F_1(x) F_2(x),$$

$$F_1(x) = \prod_{v=1}^{v=k} \left[e^{a_v x} \left(1 - \frac{x}{a_v} \right) \right],$$

$$F_2(x) = \prod_{v=k+1}^{v=\infty} \left[e^{a_v x} \left(1 - \frac{x}{a_v} \right) \right],$$

$$\lim F_1(x) = 0, \quad \text{mod } F_2(x) < 1;$$

d'où

$$\lim e^{ax} F(x) = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty F(z) e^{zx} dz$$

a une valeur finie toutes les fois que le chemin d'intégration est tel que $\lim e^{zx} = 0$. Cette intégrale définit donc une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Soit

$$F(z) = \sum A_m z^m,$$

il viendra

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{(-1)^{m+1} m! A_m}{x^{m+1}},$$

d'où

$$\lim \text{mod}(m! A_m) = 0, \quad \text{pour } m = \infty.$$

On déduit de là

$$2i\pi F(x) = \int \Phi(-z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z^2},$$

cette intégrale étant prise le long d'un contour entourant l'origine.

Si l'on se reporte maintenant au savant Mémoire de M. Halphen intitulé *Sur une série d'Abel* ⁽¹⁾, on reconnaîtra que $F(x)$,

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 67.

c'est-à-dire une fonction quelconque du genre zéro, peut être représentée par la série d'Abel dont il est question dans ce Mémoire, et cela quelle que soit la constante β .

Malheureusement ce n'est pas là une propriété caractéristique des fonctions de genre zéro. En effet, la fonction

$$F(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right),$$

qui est du genre 1, jouit de la même propriété.

En effet, je dis que l'on a

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0,$$

si l'on fait tendre x vers l'infini avec un argument donné et si α est un nombre tel que αx soit réel et négatif. Pour cela, il suffit de faire voir que

$$\lim \frac{F(x)}{\sin i \alpha x} = 0,$$

puisque, dans ces circonstances, on a

$$\lim e^{\alpha x} \sin i \alpha x = \frac{1}{2i}.$$

Or on a

$$\frac{F(x)}{\sin i \alpha x} = \frac{1}{i \alpha x} \Pi \left(\frac{1 - \frac{x^2}{n^2 L^2 n}}{1 + \frac{\alpha^2 x^2}{n^2 \pi^2}} \right),$$

d'où, si x est assez grand et que ξ soit son module et α celui de α ,

$$\text{mod} \frac{F(x)}{\sin i \alpha x} < \Pi \left(\frac{1 + \frac{\xi^2}{n^2 L^2 n}}{1 + \frac{\alpha^2 \xi^2}{n^2 \pi^2}} \right) = \Pi(\Pi_n);$$

on peut toujours prendre n assez grand pour que

$$\frac{1}{n^2 L^2 n} < \frac{\alpha^2}{n^2 \pi^2},$$

et, par conséquent, pour que le facteur Π_n correspondant soit plus

petit que 1. Nous poserons alors

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (H_n) = \prod_{n=1}^{n=k} (H_n) \times \prod_{n=k+1}^{n=\infty} (H_n).$$

Nous pourrions prendre k assez grand pour que

$$H_n < 1 \quad \text{quand} \quad n > k.$$

On aura alors

$$\text{mod} \frac{F(x)}{\sin i x} < \prod_{n=1}^{n=k} (H_n).$$

Mais, quand ξ tend vers l'infini, H_n tend vers 1.

$$G_n = \frac{\pi^2}{a^2 L^2 n};$$

d'où

$$\lim \text{mod} \frac{F(x)}{\sin i x} \leq \prod_{n=1}^{n=k} (G_n).$$

Or on peut prendre n assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on le veut.

On a donc

$$\lim \text{mod} \frac{F(x)}{\sin i x} = 0;$$

d'où

$$\lim F(x) e^{ax} = 0.$$

De là on déduit que la fonction $F(x)$ jouit de toutes les propriétés que nous avons démontrées plus haut pour les fonctions entières de genre zéro.

Considérons maintenant une fonction du genre 1 :

$$F(x) = H e^{ax} (1 - \varepsilon_y x).$$

Je dis que, si x est choisi de telle façon que

$$\lim e^{ax} = 0,$$

on aura

$$\lim e^{ax} F(x) = 0.$$

En effet, posons encore

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu + \dots;$$

nous aurons

$$F(x)e^{\alpha x^2} = \Pi [e^{\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x} (1 - \varepsilon_\nu x)].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x} (1 - \varepsilon_\nu x) < 1$$

ou pour que

$$(1) \quad \text{partie réelle}(\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x) + \text{partie réelle} L(1 - \varepsilon_\nu x) < 0?$$

Supposons qu'on ait choisi α_ν de telle façon que, à partir d'une certaine valeur de ν que j'appelle k , 1° $\alpha_\nu x^2$ soit réel et négatif; 2° $\text{mod } \alpha_\nu = h \text{ mod } \varepsilon_\nu^2$; h étant une quantité indépendante de ν et que nous allons déterminer. Je dis d'abord qu'on peut choisir h de façon à satisfaire à (1).

En effet, si l'on pose

$$\varepsilon_\nu x = \xi + i\eta,$$

l'inégalité (1) s'écrit

$$h(\xi^2 + \eta^2) > \xi + \frac{1}{2} L[(1 - \xi)^2 + \eta^2].$$

Je dis qu'on peut prendre h assez grand pour satisfaire à cette inégalité, quels que soient ξ et η .

En effet, la fonction

$$\Phi = \frac{\xi + \frac{1}{2} L[(1 - \xi)^2 + \eta^2]}{\xi^2 + \eta^2}$$

reste inférieure à une certaine limite, car elle ne pourrait devenir infinie que si ξ ou η tendaient vers l'infini, mais alors la fonction tend vers 0; ou si ξ et η tendaient vers 0, mais alors, en posant

$$\xi = \rho \cos \omega, \quad \eta = \rho \sin \omega,$$

on trouve

$$\Phi = -\frac{\cos 2\omega}{2} - \frac{\rho \cos 3\omega}{3} - \frac{\rho^2 \cos 4\omega}{4} - \dots$$

qui reste finie. Nous avons donc pour h une limite inférieure finie.

C. Q. F. D.

Posons alors

$$\arg \alpha_\nu x^2 = \pi, \quad \text{mod } \alpha_\nu = h \text{ mod } \varepsilon_\nu^2 \quad (\nu > k),$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} \alpha_\nu x^2 = \beta x^2.$$

Nous aurons

$$e^{\alpha x^2} F(x) = F_1(x) F_2(x),$$

$$F_1(x) = e^{(\alpha-\beta)x^2} \prod_{\nu=1}^{\nu=k} e^{\varepsilon_\nu x (1 - \varepsilon_\nu x)},$$

$$F_2(x) = \prod_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} e^{\alpha_\nu x^2 + \varepsilon_\nu x (1 - \varepsilon_\nu x)}.$$

On peut prendre k assez grand pour que la valeur absolue de βx^2 soit aussi petite que l'on veut et, par conséquent, pour que la partie réelle de $(\alpha - \beta)x^2$ soit négative; on aura alors

$$\lim F_1 = 0, \quad \text{mod } F_2 < 1,$$

d'où

$$\lim e^{\alpha x^2} F(x) = 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En général, si $F(x)$ est une fonction de genre n , on aura

$$\lim F(x) e^{\alpha x^{n+1}} = 0$$

toutes les fois que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0.$$

Il suit de là que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z) dz$$

représente une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Posons

$$\int_0^\infty e^{xz^{n+1}} z^p dz = C_p.$$

Nous aurons, en changeant z en zx ,

$$\int_0^x e^{(xz)^{n+1}} z^p dz x^{p+1} = C_p$$

ou

$$\int_0^x e^{(xz)^{n+1}} z^p dz = \frac{C_p}{x^{p+1}}.$$

En différentiant cette relation, on trouve

$$\int_0^x e^{(xz)^{n+1}} z^{n+1} (n+1) x^{n+2} z^p dz = -\frac{(p+1)C_p}{x^{p+2}}$$

ou, faisant $x=1$,

$$C_{p+n+1} = \int_0^x e^{z^{n+1}} z^{p+n+1} dz = -\frac{p+1}{n+1} C_p.$$

Si donc on pose

$$p = \alpha(n+1) + r, \quad r < n+1,$$

il vient

$$C_p = (-1)^\alpha C_r \frac{(r+1)[(r+1)+(n+1)][(r+1)+2(n+1)] \dots [(r+1)+(\alpha-1)(n+1)]}{(n+1)^\alpha},$$

ou, posant

$$\frac{r+1}{n+1} = s,$$

$$C_p = (-1)^\alpha C_r \quad s(s+1)(s+2) \dots (s+\alpha-1),$$

Or, quand α tend vers l'infini

$$\lim \frac{s(s+1)(s+2) \dots (s+\alpha-1)}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)} = \infty.$$

Si l'on pose

$$F(z) = \sum A_m z^m, \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{B_m}{x^{m+1}},$$

il vient

$$\text{mod } B_p = \text{mod } C_r \text{ mod } A_p \quad s(s+1)(s+2) \dots (s+\alpha-1),$$

d'où

$$\lim A_p 1 \cdot 2 \dots (\alpha-1) = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = \infty,$$

car

$$\lim B_p = 0.$$

Mais, comme on a aussi

$$\lim p B_p = 0,$$

on aura

$$\lim a B_p = 0,$$

$$\lim A_p a! = 0.$$

Or nous avons

$$p! < (n+1)^{n+1} [2^{n+1} (n+1)^{n+1}] [3^{n+1} (n+1)^{n+1}] \dots [a^{n+1} (n+1)^{n+1}] p^r,$$

$$p! < (a!)^{n+1} (n+1)^p p^r$$

ou

$$A_p^{n+1} \sqrt[p]{p!} < A_p a! (n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}} < A_p (a-1)! (n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1}$$

ou

$$< \frac{B_p}{C_r} \frac{s(s+1) \dots (s+a-1)}{(a-1)!} (n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1} < \frac{1}{C_r s} B_p (n+1)^{\frac{p}{n+1}} p^{\frac{r}{n+1}+1},$$

dont la limite est zéro.

Donc

$$\lim A_p^{n+1} \sqrt[p]{p!} = 0.$$

Ainsi, dans une fonction entière de genre n , le coefficient de x^p multiplié par la racine $n+1^{\text{ième}}$ du produit des p premiers nombres tend vers zéro quand p croît indéfiniment.

Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre, dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré; par M. COURSAT.

(Séance du 20 juillet 1883.)

1. Les intégrales d'une équation linéaire d'ordre m sont caractérisées par cette propriété que, entre m intégrales, formant un système fondamental, il ne peut exister aucune relation linéaire et homogène; mais il peut y avoir entre ces intégrales une relation homogène d'un degré supérieur.

Dans un récent *Mémoire* (*Acta mathematica*, t. I, p. 321). M. Fuchs a étudié les équations du troisième ordre à coefficients

rationnels dont les intégrales vérifient une relation de cette nature; l'éminent géomètre a montré que, si la relation est d'un degré supérieur au second, l'intégrale générale peut s'exprimer au moyen de fonctions algébriques. Dans le cas particulier où la relation est du second degré, les intégrales de l'équation proposée sont les carrés des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels ⁽¹⁾. Je me propose de montrer qu'il existe un cas de réduction analogue pour les équations linéaires du quatrième ordre. La méthode que j'emploie s'appliquant avec une égale facilité aux équations du troisième ordre, je commencerai par l'indiquer en quelques mots.

2. Soit

$$(1) \quad \frac{d^3 u}{dx^3} + 3B \frac{d^2 u}{dx^2} + 3C \frac{du}{dx} + Du = 0$$

une équation linéaire du troisième ordre ou, pour plus de généralité, je suppose que B, C, D soient des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) , y étant lié à x par la relation algébrique $f(x, y) = 0$. S'il existe entre les intégrales de l'équation (1) une relation homogène du second degré à coefficients constants, cette relation pourra être mise sous la forme

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, sous la forme

$$(2) \quad v_1^2 = v_2 v_3,$$

v_1, v_2, v_3 désignant trois intégrales linéairement distinctes. D'ailleurs, il est clair que, entre les intégrales v_1, v_2, v_3 , il ne saurait exister d'autre relation homogène différente de l'équation (2). Cela posé, faisons décrire un cycle à la variable x ; v_1, v_2, v_3 se changent respectivement en

$$\begin{aligned} a v_1 + b v_2 + c v_3, \\ a' v_1 + b' v_2 + c' v_3, \\ a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Voir, à ce sujet, LAGUERRE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, p. 124 et 216; APPELL, *Annales de l'École Normale*, 1881, p. 413.

le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

étant essentiellement différent de zéro.

On devra encore avoir

$$(a v_1 + b v_2 + c v_3)^2 = (a' v_1 + b' v_2 + c' v_3)(a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3),$$

ou bien

$$(3) \quad \frac{a v_1 + b v_2 + c v_3}{a' v_1 + b' v_2 + c' v_3} = \frac{a'' v_1 + b'' v_2 + c'' v_3}{a v_1 + b v_2 + c v_3}.$$

La relation (3) doit être identique avec la relation (2), c'est-à-dire que si, entre (2) et (3), on élimine une des quantités v_1 , v_2 , v_3 , le résultat devra être identiquement nul. Pour faire cette élimination, posons

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_3}{v_1} = \omega;$$

on en tire

$$v_1 = \omega v_2, \quad v_3 = \omega^2 v_2,$$

et la relation (3) peut s'écrire

$$(4) \quad \frac{a \omega + b + c \omega^2}{a' \omega + b' + c' \omega^2} = \frac{a'' \omega + b'' + c'' \omega^2}{a \omega + b + c \omega^2},$$

et cette égalité doit avoir lieu pour toute valeur de ω .

Les trois quantités c , c' , c'' ne pouvant être nulles en même temps, puisque Δ est différent de zéro, l'une, au moins, des deux fractions sera du second degré. D'un autre côté, les numérateurs et les dénominateurs de ces deux fractions ne peuvent être identiques à un facteur constant près; ce qui entraînerait $\Delta = 0$. Pour que l'égalité (4) ait lieu pour toute valeur de ω , il faudra donc que les deux termes de chacune de ces fractions présentent un facteur commun du premier degré, si elles sont toutes deux du second degré, ou que cela ait lieu pour l'une d'elles, s'il n'y en a qu'une du second degré. Dans les deux cas, par la suppression de ce facteur commun, les deux fractions se réduisent au premier degré, et l'on a identiquement

$$\frac{a \omega + b + c \omega^2}{a' \omega + b' + c' \omega^2} = \frac{a' \omega + b'' + c'' \omega^2}{a \omega + b + c \omega^2} = \frac{\lambda \omega + \mu}{\gamma \omega + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ désignant des quantités constantes. Il en résulte que tout cycle décrit par la variable change ω en une expression de la forme $\frac{\lambda\omega + \mu}{\nu\omega + \rho}$. Posons, en général,

$$\Pi(u) = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left(\frac{u''}{u'} \right)^2,$$

u désignant une fonction quelconque de x ; on a, quelles que soient les constantes λ, μ, ν, ρ ,

$$\Pi \left(\frac{\lambda u + \mu}{\nu u + \rho} \right) = \Pi(u).$$

La fonction $\Pi(\omega)$ est donc une fonction uniforme du point analytique (x, y) .

Soit $\Pi(\omega) = P(x, y)$; considérons maintenant l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = p \frac{dz}{dx} + qz,$$

où p et q sont des fonctions uniformes du même point analytique (x, y) . Le rapport r_1 de deux intégrales de cette équation satisfait, comme on sait, à l'équation du troisième ordre

$$\frac{r_1'''}{r_1'} - \frac{3}{2} \left(\frac{r_1''}{r_1'} \right)^2 = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{2} p^2 - 2q;$$

on peut prendre p et q , et cela, d'une infinité de manières, de façon que l'on ait

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{2} p^2 - 2q = P(x, y).$$

Il suffira de prendre, par exemple, $p = 0$, $q = -\frac{1}{2} P(x, y)$. L'équation

$$(5) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{2} P(x, y) z = 0$$

admettra deux intégrales dont le rapport sera précisément égal à ω ; il suffira de prendre les trois constantes arbitraires qui entrent dans l'expression de r_1 , de façon que r_1 et ses deux premières dérivées prennent les mêmes valeurs que ω et ses deux premières dérivées pour une valeur particulière de la variable. Soient z_1 et z_2 les deux intégrales dont le rapport est égal à ω ; on peut

écrire

$$\omega = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1 z_2}{z_2^2}$$

et, par suite,

$$\frac{v_1}{z_1 z_2} = \frac{v_2}{z_2^2} = \frac{v_3}{z_1^2}.$$

Imaginons que l'on ait formé l'équation linéaire du troisième ordre qui admet pour intégrales les carrés des intégrales de l'équation (5) et soit $F(Z) = 0$ cette équation. Ses coefficients seront aussi des fonctions uniformes du point analytique (x, y) et un système fondamental d'intégrales sera constitué par $z_1^2, z_1 z_2, z_2^2$. Désignons par $\frac{1}{\varphi(x, y)}$ la valeur commune des rapports précédents; si dans l'équation $F(Z) = 0$ on fait la transformation

$$Z = \varphi(x, y)u,$$

on devra retrouver l'équation (1). Il en résulte que $\varphi(x, y)$ devra être de la forme

$$\varphi(x, y) = e^{\int \psi(x, y) dx},$$

$\psi(x, y)$ désignant une fonction uniforme du point analytique (x, y) .

Les intégrales de l'équation (1) seront donc

$$z_1^2 e^{-\int \psi(x, y) dx}, \quad z_1 z_2 e^{-\int \psi(x, y) dx}, \quad z_2^2 e^{-\int \psi(x, y) dx}.$$

En posant dans l'équation (5)

$$z = e^{\frac{1}{2} \int \psi(x, y) dx} Y,$$

on aura une équation de même forme en Y , dont les carrés des intégrales seront précisément les intégrales de l'équation (1).

Soit

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = Pz$$

une équation du second ordre; formons l'équation du troisième

ordre en $u = z^2$. On a

$$\begin{aligned} u &= z^2, \\ \frac{du}{dx} &= 2z \frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= 2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + 2P'z^2, \\ \frac{d^3u}{dx^3} &= 8Pz \frac{dz}{dx} + 2P'z^2; \end{aligned}$$

l'élimination de z^2 , $z \frac{dz}{dx}$, $\left(\frac{dz}{dx} \right)^2$ entre ces quatre équations, conduit à l'équation

$$(6) \quad \frac{d^3u}{dx^3} - 4P \frac{du}{dx} - 2P'u = 0.$$

Si l'on pose ensuite $u = \varphi(x)U$, on aura la forme générale d'une équation du troisième ordre dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré; elle contient deux fonctions arbitraires P et $\varphi(x)$. Étant donnée une équation linéaire quelconque, on sait qu'on peut, par un changement de fonction, faire disparaître le second terme et cela d'une seule manière. Pour qu'une équation du troisième ordre appartienne à la catégorie précédente, il faudra que, cette transformation effectuée, elle soit de la forme (6), et l'on a immédiatement la valeur correspondante de P .

3. Je considère maintenant une équation linéaire du quatrième ordre, et je suppose d'abord que les coefficients soient uniformes

$$(7) \quad \frac{d^4u}{dx^4} + 4B \frac{d^3u}{dx^3} + 6C \frac{d^2u}{dx^2} + 4D \frac{du}{dx} + Eu = 0.$$

S'il existe entre les intégrales de cette équation une relation homogène du second degré, on sait, d'après la théorie des formes quadratiques, que cette relation pourra toujours être mise sous la forme

$$(8) \quad \alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + \gamma u_3^2 + \delta u_4^2 = 0.$$

u_1, u_2, u_3, u_4 désignant quatre intégrales formant un système fondamental et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des quantités constantes. Deux de ces coefficients ne peuvent être nuls en même temps, mais nous

aurons deux cas à distinguer suivant qu'aucun d'eux n'est nul ou que l'un d'eux est égal à zéro.

4. Je prends d'abord le cas où α , β , γ , δ sont tous différents de zéro. La relation précédente pourra s'écrire

$$(8)' \quad U_1 U_4 = U_2 U_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_1 &= u_1 \sqrt{\alpha} + u_2 \sqrt{-\beta}, \\ U_4 &= u_1 \sqrt{\alpha} - u_2 \sqrt{-\beta}, \\ U_2 &= u_3 \sqrt{-\gamma} + u_4 \sqrt{\delta}, \\ U_3 &= u_3 \sqrt{-\gamma} - u_4 \sqrt{\delta}; \end{aligned}$$

U_1, U_2, U_3, U_4 forment encore un système fondamental.

Désignons par $(U_1)', (U_2)', (U_3)', (U_4)'$ les valeurs nouvelles de ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé; on aura

$$\begin{aligned} (U_1)' &= a U_1 + b U_2 + c U_3 + d U_4, \\ (U_2)' &= e U_1 + f U_2 + g U_3 + h U_4, \\ (U_3)' &= c' U_1 + f' U_2 + g' U_3 + h' U_4, \\ (U_4)' &= a' U_1 + b' U_2 + c' U_3 + d' U_4, \end{aligned}$$

$a, b, c, \dots$ étant des constantes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Les intégrales $(U_1)', (U_2)', (U_3)', (U_4)'$ doivent encore vérifier la relation $(8)'$; ce qui peut s'écrire

$$(9) \quad \frac{a U_1 + b U_2 + c U_3 + d U_4}{e U_1 + f U_2 + g U_3 + h U_4} = \frac{e' U_1 + f' U_2 + g' U_3 + h' U_4}{a' U_1 + b' U_2 + c' U_3 + d' U_4}.$$

De plus, s'il n'existe pas entre les intégrales de l'équation (7) de relation homogène du second degré différente de la relation $(8)'$, comme nous le supposons, les équations $(8)'$ et (9) devront revenir l'une à l'autre. Si l'on élimine entre elles une des intégrales U_1, U_2, U_3, U_4 , le résultat devra être identiquement

nul. Pour faire cette élimination, posons

$$\omega_1 = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4},$$

$$\omega_2 = \frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4};$$

l'équation (9) devient

$$(9)' \quad \frac{(a\omega_1 + b)\omega_2 + c\omega_1 + d}{(e\omega_1 + f)\omega_2 + g\omega_1 + h} = \frac{(e'\omega_1 + f')\omega_2 + g'\omega_1 + h'}{(a'\omega_1 + b')\omega_2 + c'\omega_1 + d'},$$

et cette nouvelle relation devra être satisfaite, quelles que soient les quantités ω_1, ω_2 . Les quatre coefficients a, a', e, e' ne peuvent être nuls à la fois; l'une au moins des deux fractions contiendra un terme en $\omega_1 \omega_2$. D'autre part, les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions ne peuvent être identiques à un facteur constant près, car il s'ensuivrait que Δ est nul. Il faut donc, pour que l'égalité (9)' ait lieu, quels que soient ω_1, ω_2 , que les deux termes de chacune des deux fractions présentent un facteur commun du premier degré en ω_1, ω_2 si elles sont toutes deux du second degré ou que cela ait lieu pour l'une d'elles au moins, s'il n'y en a qu'une du second degré. Supposons, par exemple, $a \neq 0$; l'expression $a\omega_1 \omega_2 + b\omega_2 + c\omega_1 + d$ ne peut se décomposer qu'en un produit de deux facteurs tels que $(l\omega_1 + m), (p\omega_2 + q)$.

La suppression d'un facteur commun du premier degré au numérateur et au dénominateur de

$$\frac{a\omega_1 \omega_2 + b\omega_2 + c\omega_1 + d}{e\omega_1 \omega_2 + f\omega_2 + g\omega_1 + h}$$

ramènera cette fraction à l'une des deux formes

$$\frac{\lambda\omega_1 + \mu}{\nu\omega_1 + \rho}, \quad \frac{\lambda_1\omega_2 + \mu_1}{\nu_1\omega_2 + \rho_1};$$

de même la fraction

$$\frac{(a\omega_1 + b)\omega_2 + c\omega_1 + d}{(e'\omega_1 + f')\omega_2 + g'\omega_1 + h'}$$

devra se réduire à l'une des deux formes

$$\frac{\lambda'\omega_1 + \mu'}{\nu'\omega_1 + \rho'}, \quad \frac{\lambda'_1\omega_2 + \mu'_1}{\nu'_1\omega_2 + \rho'_1}.$$

Mais il est à remarquer que si la première fraction se réduit à $\frac{\lambda\omega_1 + \mu}{\nu\omega_1 + \rho}$, la seconde devient $\frac{\lambda'_1\omega_2 + \mu'_1}{\nu'_1\omega_2 + \rho'_1}$ et inversement.

Nous voyons donc que, la variable décrivant un contour fermé quelconque, on a soit

$$(\omega_1)' = \frac{\lambda\omega_1 + \mu}{\nu\omega_1 + \rho}, \quad (\omega_2)' = \frac{\lambda'_1\omega_2 + \mu'_1}{\nu'_1\omega_2 + \rho'_1},$$

soit

$$(\omega_1)' = \frac{\lambda_1\omega_2 + \mu_1}{\nu_1\omega_2 + \rho_1}, \quad (\omega_2)' = \frac{\lambda'\omega_1 + \mu'}{\nu'\omega_1 + \rho'}.$$

Posons comme plus haut $H(u) = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2} \left(\frac{u''}{u'} \right)^2$; la variable x décrivant un contour fermé quelconque, les fonctions $H(\omega_1)$, $H(\omega_2)$ ne peuvent que revenir à leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles. Donc :

Les fonctions $H(\omega_1)$, $H(\omega_2)$ sont racines d'une équation quadratique à coefficients uniformes

$$(10) \quad H^2 + 2\Phi(x)H + \Psi(x) = 0.$$

Soient H_1 , H_2 les deux racines de cette équation; considérons les deux équations linéaires

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} H_1 y = 0, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{2} H_2 z = 0. \end{cases}$$

Soient y_1 , y_2 un système fondamental d'intégrales de la première, et z_1 , z_2 un système fondamental d'intégrales de la seconde : les produits $y_1 z_1$, $y_1 z_2$, $y_2 z_1$, $y_2 z_2$ constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes. En effet, la variable décrivant un contour fermé quelconque, les racines H_1 , H_2 de l'équation (10) reviennent à leurs valeurs initiales ou s'échangent entre elles. En désignant par $(y_1)'$, $(y_2)'$, $(z_1)'$, $(z_2)'$ les valeurs finales des fonctions y_1 , y_2 , z_1 , z_2 , on a, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} (y_1)' &= c_0 y_1 + c_1 y_2, \\ (y_2)' &= c'_0 y_1 + c'_1 y_2, \\ (z_1)' &= d_0 z_1 + d_1 z_2, \\ (z_2)' &= d'_0 z_1 + d'_1 z_2, \end{aligned}$$

et, dans le second cas,

$$\begin{aligned}(y_1)' &= d_0 z_1 + d_1 z_2, \\ (y_2)' &= d'_0 z_1 + d'_1 z_2, \\ (z_1)' &= c_0 y_1 + c_1 y_2, \\ (z_2)' &= c'_0 y_1 + c'_1 y_2;\end{aligned}$$

dans les deux cas les valeurs finales des produits $y_1 y_2$, $y_1 z_2$, $y_2 z_1$, $y_2 z_2$ s'expriment par des formules linéaires et homogènes à coefficients constants au moyen des valeurs initiales.

Supposons, comme on l'a expliqué tout à l'heure (n° 2), qu'on ait choisi les intégrales y_1 , y_2 , z_1 , z_2 de façon que le rapport $\frac{y_1}{y_2}$ soit égal à ω_1 et le rapport $\frac{z_1}{z_2}$ à ω_2 , et soit $F(P) = 0$ l'équation du quatrième ordre à coefficients uniformes qui admet pour intégrales les produits des intégrales des deux équations (11). Des relations

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{y_1}{y_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_4}, \\ \omega_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{U_1}{U_3} = \frac{U_2}{U_4},\end{aligned}$$

on tire facilement

$$\frac{U_1}{y_1 z_1} = \frac{U_2}{y_2 z_1} = \frac{U_3}{y_1 z_2} = \frac{U_4}{y_2 z_2}.$$

Désignons par $\frac{1}{\varphi(x)}$ la valeur commune des rapports précédents; si, dans l'équation $F(P) = 0$, on pose

$$P = \varphi(x)u,$$

on devra retrouver l'équation (7). Il en résulte que $\varphi(x)$ sera de la forme

$$\varphi(x) = e^{\int \psi(x) dx},$$

$\psi(x)$ étant une fonction uniforme de x , et l'équation (7) aura pour intégrales

$$y_1 z_1 e^{-\int \psi(x) dx}, \quad y_1 z_2 e^{-\int \psi(x) dx}, \quad y_2 z_1 e^{-\int \psi(x) dx}, \quad y_2 z_2 e^{-\int \psi(x) dx}.$$

Soient maintenant $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ deux fonctions uniformes de x , telles que $\pi_1(x) + \pi_2(x) = \psi(x)$. Si dans les équations (11) on

pose

$$y = e^{\int \pi_1(x) dx} Y,$$

$$z = e^{\int \pi_2(x) dx} Z,$$

les intégrales de l'équation proposée (7) seront précisément les produits des intégrales des deux équations du second ordre en Y et en Z. On a donc le théorème suivant :

THÉOREME I. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène du second degré et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme (8), les intégrales de cette équation sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre dont les coefficients sont racines d'équations quadratiques à coefficients uniformes.*

Remarque I. — On peut prendre pour π_1 et π_2 des fonctions quelconques de x , assujetties à la seule condition

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) = \psi(x).$$

Si l'on prend, comme nous l'avons supposé, des fonctions uniformes, les coefficients de $\frac{dY}{dx}$ et de $\frac{dZ}{dx}$ seront uniformes, et les coefficients de Y et de Z seront racines d'une équation du second degré à coefficients uniformes, comme H_1 et H_2 .

Remarque II. — Il peut arriver que dans l'équation (10) $\Phi^2 - \Psi$ soit un carré parfait; dans ce cas, les équations en Y et en Z seront elles-mêmes à coefficients uniformes et absolument distinctes l'une de l'autre.

Remarque III. — Supposons que l'équation (7) ait toutes ses intégrales régulières; $H(\omega_1)$, $H(\omega_2)$ présentent pour toute valeur de x le caractère de fonctions algébriques, et, par suite, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ seront des fonctions rationnelles de la variable. On pourra prendre pour $H(\omega)$ une fonction rationnelle de x et de v , v étant liée à x par une équation du second degré. On peut, de plus, reconnaître facilement que les produits $(x - a_i)^2 H(\omega)$, $\frac{1}{x^2} H(\omega)$ restent finis pour $x = a_i$ et pour $x = \infty$. Il en résulte que les intégrales des équations en y et en z sont également régulières.

J'ai admis, pour faire le raisonnement, que les coefficients B, C, D, E étaient uniformes; mais il est bien aisé de voir que la méthode et les résultats subsistent si ces coefficients sont des fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) . Il n'y a qu'à remplacer partout *fonctions uniformes d'une variable* par *fonctions uniformes d'un point analytique (x, y) et contour fermé par cycle*.

§. Voici comment on pourra former l'équation générale du quatrième ordre dont les intégrales vérifient la relation (8). Considérons les deux équations du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \Pi y,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = K z,$$

qui donnent comme conséquences

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \Pi \frac{dy}{dx} + \Pi' y,$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = (\Pi^2 + \Pi'') y + 2 \Pi' \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = K \frac{dz}{dx} + K' z,$$

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = (K^2 + K'') z + 2 K' \frac{dz}{dx},$$

et posons $u = yz$. On aura successivement

$$\frac{du}{dx} = z \frac{dy}{dx} + y \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = (\Pi + K) yz + 2 \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = (\Pi' + K') yz + (3K + \Pi) z \frac{dy}{dx} + (3\Pi + K) y \frac{dz}{dx},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} = & (\Pi^2 + \Pi'' + K^2 + K'' + 6K\Pi) yz + 2(\Pi' + 2K') z \frac{dy}{dx} \\ & + 2(2\Pi' + K') y \frac{dz}{dx} + 4(\Pi + K) \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dx}; \end{aligned}$$

l'élimination de yz , $z \frac{dz}{dx}$, $z \frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx}$ entre ces cinq équations

conduit à l'équation linéaire du quatrième ordre

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^4 u}{dx^4} - \frac{K' - H'}{K - H} \frac{d^3 u}{dx^3} - 2(K + H) \frac{d^2 u}{dx^2} \\ & + \frac{[5(HK' - KH') + HH' - KK']}{K - H} \frac{du}{dx} \\ & + \left[\frac{K'^2 - H'^2}{K - H} \div (K - H)^2 - (K'' + H'') \right] u = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait ensuite la transformation $u = \varphi(x)U$, on aura la forme la plus générale des équations demandées; elle contient, comme on voit, trois fonctions arbitraires K , H et $\varphi(x)$.

6. Supposons en second lieu que l'un des coefficients α , β , γ , δ de la relation (8) soit nul, par exemple $\delta = 0$. Cette relation pourra alors s'écrire

$$(13) \quad U_1^2 = U_2 U_3,$$

en posant

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{\alpha} u_1, \\ U_2 &= \sqrt{-\beta} u_2 + \sqrt{\gamma} u_3, \\ U_3 &= \sqrt{-\beta} u_2 - \sqrt{\gamma} u_3. \end{aligned}$$

Soient toujours $(U_1)'$, $(U_2)'$, $(U_3)'$, $(U_4)'$ les valeurs que prennent ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé. On devra donc avoir

$$(U_1')^2 = (U_2')(U_3),$$

c'est-à-dire

$$(14) \quad \frac{aU_1 + bU_2 + cU_3 + dU_4}{eU_1 + fU_2 + gU_3 + hU_4} = \frac{e'U_1 + f'U_2 + g'U_3 + h'U_4}{a'U_1 + b'U_2 + c'U_3 + d'U_4},$$

et s'il n'existe pas, comme nous le supposons, d'autre relation homogène du second degré entre les intégrales de l'équation (7), les équations (13) et (14) devront revenir l'une à l'autre.

Si l'on élimine entre ces deux équations une des quantités U_1 , U_2 , U_3 , le résultat devra être identiquement nul. Pour faire cette élimination, je pose

$$\omega_1 = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_3}{U_1}, \quad \omega_2 = \frac{U_3}{U_2};$$

l'équation (14) devient

$$\frac{a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2}{c\omega_1 + f + g\omega_1^2 + h\omega_2} = \frac{e'\omega_1 + f' + g'\omega_1^2 + h'\omega_2}{a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2},$$

et cette nouvelle égalité doit être vérifiée pour toute valeur de ω_1 et de ω_2 , sans que cependant les numérateurs et les dénominateurs des deux fractions soient identiques à un facteur constant près. Il faudra donc que l'une au moins des deux fractions soit du second degré et que les deux termes de cette fraction se décomposent en un produit de deux facteurs du premier degré et aient un facteur commun.

Supposons, par exemple, $c \neq 0$; la fonction $a\omega_1 + b + c\omega_1^2 + d\omega_2$ ne pourra se décomposer en un produit de facteurs du premier degré si $d = 0$. De même, si $g \neq 0$, le dénominateur de cette fraction ne pourra se décomposer en un produit de deux facteurs que si $h = 0$. Si $g = 0$, le trinôme $e\omega_1 + f + h\omega_2$ ne pourra entrer en facteur dans $a\omega_1 + b + c\omega_1^2$ que si $h = 0$.

On aura donc dans tous les cas $d = 0$, $h = 0$, et, par suite, $h' = 0$. Il suit de là que U_1, U_2, U_3 constituent un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire du troisième ordre à coefficients uniformes et, comme elles vérifient la relation (13), d'après ce qui a été démontré antérieurement, on a le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène du second degré et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme (13), cette équation admet comme intégrales les carrés des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.*

On voit par là que l'équation (7) ne sera pas irréductible. Si $F(u) = 0$ est l'équation générale du troisième ordre dont les intégrales vérifient la relation (13), l'équation (7) sera de la forme

$$\frac{dF(u)}{dx} - P F(u) = 0,$$

P désignant une fonction de x .

7. Je suppose maintenant que les intégrales de l'équation (7) vérifient deux relations analogues à l'équation (8). Il est com-

mode, pour faciliter le raisonnement, d'employer le langage géométrique, qui n'est en définitive qu'une interprétation de faits algébriques, indépendants des conditions de réalité des quantités qui y figurent. Ainsi U_1, U_2, U_3, U_4 désignant des quantités imaginaires quelconques, on peut définir ces quantités comme les coordonnées homogènes d'un point; l'ensemble des systèmes de valeurs qui vérifient une relation homogène du second degré, telle que

$$(15) \quad F(u_1, u_2, u_3, u_4) = A u_1^2 + A' u_2^2 + A'' u_3^2 + \dots = 0$$

sera dite une surface du second degré. A ce point de vue-là, le problème que nous venons de traiter revient à la recherche des transformations linéaires qui font revenir sur elle-même une surface du second degré. Si maintenant on prend pour U_1, U_2, U_3, U_4 quatre intégrales de l'équation (7) formant un système fondamental, et si ces intégrales vérifient deux relations analogues à la relation (15), on peut, toujours dans cet ordre d'idées, considérer U_1, U_2, U_3, U_4 comme les coordonnées homogènes d'un point d'une courbe intersection de deux surfaces du second degré. La variable x décrivant un contour fermé quelconque, U_1, U_2, U_3, U_4 sont remplacées par des combinaisons linéaires et homogènes de ces intégrales. Mais les deux nouvelles relations analogues à l'équation (15) doivent admettre les mêmes solutions que les premières, de sorte que la question revient à chercher les transformations linéaires qui font revenir sur elle-même la courbe d'intersection de deux surfaces du second degré.

Nous devons évidemment écarter le cas où cette intersection se décomposerait en deux courbes planes, et nous n'avons qu'à examiner les cas où cette intersection est une véritable biquadratique gauche ou se compose d'une ligne droite et d'une cubique gauche.

8. Prenons d'abord le cas où l'intersection se compose d'une biquadratique gauche, et supposons qu'elle n'admet ni point double, ni point de rebroussement. On sait qu'il existe quatre cônes du second degré, et quatre seulement, passant par cette courbe, les sommets formant les quatre sommets d'un tétraèdre. Imaginons qu'on ait pris ce tétraèdre pour tétraèdre de référence; les équations de la biquadratique pourront être prises sous la

forme suivante :

$$(15) \quad \begin{cases} U_1^2 + U_2^2 = U_3^2, \\ U_1^2 + a U_2^2 = U_4^2; \end{cases}$$

et celles-ci entraînent les suivantes :

$$(16) \quad \begin{cases} (a-1)U_2^2 + U_3^2 = U_4^2, \\ (a-1)U_1^2 + U_4^2 = a U_3^2; \end{cases}$$

ce qui revient à prendre convenablement les intégrales U_1, U_2, U_3, U_4 formant un système fondamental. Toute transformation linéaire qui fait revenir la biquadratique gauche sur elle-même ne doit pas changer le tétraèdre de référence; les faces de ce tétraèdre se correspondront à elles-mêmes à moins de s'échanger entre elles. Il en résulte qu'après un contour fermé décrit par la variable, la valeur finale de U_1 , par exemple, aura l'une des formes suivantes, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont constants :

$$\lambda_1 U_1, \quad \lambda_2 U_2, \quad \lambda_3 U_3, \quad \lambda_4 U_4,$$

et ainsi des autres. Si nous considérons les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{U_1} \frac{dU_1}{dx}, \quad \frac{1}{U_2} \frac{dU_2}{dx}, \quad \frac{1}{U_3} \frac{dU_3}{dx}, \quad \frac{1}{U_4} \frac{dU_4}{dx},$$

ces quatre fonctions ne pourront que reprendre leurs valeurs initiales ou s'échanger entre elles; ce sont donc *les racines d'une équation du quatrième degré à coefficients uniformes*.

Pour examiner de plus près les transformations possibles, je remarque que le nombre des cas à examiner est égal au nombre des permutations de quatre lettres, c'est-à-dire vingt-quatre. Les considérations suivantes donnent presque immédiatement celles qui sont possibles. Je remarque que le rapport anharmonique des quatre plans passant par une tangente à la courbe gauche et par les quatre sommets du tétraèdre de référence est constant et a l'une des valeur suivantes :

$$a, \quad 1-a, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}, \quad \frac{a-1}{a}.$$

Les vingt-quatre permutations des lettres U_1, U_2, U_3, U_4 se partagent en six groupes de quatre permutations, le rapport

anharmonique conservant la même valeur pour un même groupe. Telles sont les quatre permutations

$$\begin{aligned} &U_1, U_2, U_3, U_4, \\ &U_2, U_1, U_4, U_3, \\ &U_3, U_4, U_1, U_2, \\ &U_4, U_3, U_2, U_1. \end{aligned}$$

Il en résulte un certain nombre de transformations linéaires qui laissent invariable la biquadratique et qui sont de l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} U_1 &= \lambda U_2, & U_2 &= \mu U_1, & U_3 &= \nu U_4, & U_4 &= \rho U_3, \\ U_1 &= \lambda U_3, & U_2 &= \mu U_4, & U_3 &= \nu U_1, & U_4 &= \rho U_2, \\ U_1 &= \lambda U_4, & U_2 &= \mu U_3, & U_3 &= \nu U_2, & U_4 &= \rho U_1; \end{aligned}$$

pour la première, par exemple, il suffira de prendre

$$\lambda^2 = \alpha \mu^2 = -\alpha \nu^2 = -\rho^2,$$

et l'on a des conditions analogues pour les autres. Ces transformations existent toujours, quel que soit α . Au contraire, pour qu'il existe une transformation linéaire telle que

$$U_1 = \lambda U_2, \quad U_2 = \mu U_3, \quad U_3 = \nu U_4, \quad U_4 = \rho U_1,$$

qui change en elle-même la biquadratique gauche, comme le rapport anharmonique de quatre plans n'est pas changé par une transformation de ce genre, il faudra que les rapports anharmoniques correspondant aux deux permutations

$$\begin{aligned} &U_1, U_2, U_3, U_4, \\ &U_2, U_3, U_4, U_1 \end{aligned}$$

aient la même valeur ou bien $1 - \alpha = \alpha$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{2}$, et, si cette condition est remplie, il suffira de prendre pour λ, μ, ν, ρ des coefficients satisfaisant aux conditions

$$\lambda^2 = -\frac{\mu^2}{2} = -\frac{\nu^2}{2} = -\rho^2.$$

Tout pareillement, pour qu'il existe d'autres transformations que celles dont on vient de parler, il faut et il suffit que deux des

rapports anharmoniques précédents aient la même valeur ou que α ait l'une des valeurs

$$-1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \pm \sqrt{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En résumé, les transformations linéaires qui reproduisent une biquadratique gauche sont en *nombre limité*, en considérant comme identiques les transformations qui ne diffèrent que par un facteur constant. Soit U une intégrale quelconque de l'équation (7)

$$U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3 + C_4 U_4;$$

les valeurs que pourra prendre cette intégrale pour une valeur donnée de la variable s'obtiendront en multipliant un nombre *fini* d'entre elles par des facteurs constants. Il en résulte que la dérivée logarithmique

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx}$$

n'admet, pour chaque valeur de x , qu'un nombre limité de valeurs. Cela posé, soient maintenant u_1, u_2, u_3, u_4 quatre intégrales quelconques de l'équation (7), formant un système fondamental; on a entre ces intégrales la relation

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \frac{d^3 u_1}{dx^3} & \frac{d^2 u_1}{dx^2} & \frac{du_1}{dx} & u_1 \\ \frac{d^3 u_2}{dx^3} & \frac{d^2 u_2}{dx^2} & \frac{du_2}{dx} & u_2 \\ \frac{d^3 u_3}{dx^3} & \frac{d^2 u_3}{dx^2} & \frac{du_3}{dx} & u_3 \\ \frac{d^3 u_4}{dx^3} & \frac{d^2 u_4}{dx^2} & \frac{du_4}{dx} & u_4 \end{vmatrix} = C e^{\int -4B dx};$$

supposons qu'on ait fait disparaître le second terme B ; la relation (17) pourra s'écrire

$$(17)' \quad u_1 u_2 u_3 u_4 \begin{vmatrix} \frac{1}{u_1} \frac{d^3 u_1}{dx^3} & \frac{1}{u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} & \frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dx} & 1 \\ \frac{1}{u_2} \frac{d^3 u_2}{dx^3} & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{u_4} \frac{d^3 u_4}{dx^3} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = C.$$

On vient de voir que les fonctions $\frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dx}, \frac{1}{u_2} \frac{du_2}{dx}, \dots$ admettent, pour chaque valeur de x , un nombre limité de valeurs. Posons, pour abréger,

$$\frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dx} = f(x);$$

on en déduit successivement

$$\frac{1}{u_1} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = f'(x) + f(x)^2 = f_1(x),$$

$$\frac{1}{u_1} \frac{d^3 u_1}{dx^3} = f_1'(x) + f(x) f_1(x) = f_2(x);$$

il en résulte que, pour une valeur donnée de x , le déterminant précédent n'admet qu'un nombre limité de valeurs; et, par suite, il en est de même du produit $u_1 u_2 u_3 u_4$. Si le produit de quatre intégrales quelconques n'admet en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, il en est de même du quotient de deux intégrales quelconques et, par suite, d'une intégrale quelconque. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient deux relations homogènes du second degré, pouvant être mises sous la forme (15), une intégrale quelconque sera racine d'une équation entière à coefficients uniformes, pourvu qu'on fasse disparaître le second terme dans l'équation (7).*

Si l'équation (7) a toutes ses intégrales régulières, l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

9. Je suppose en second lieu que la biquadratique gauche ait un point double; il existe seulement trois cônes distincts du second degré passant par la courbe gauche.

L'un de ces cônes S_1 a son sommet au point double, les deux autres S_2, S_3 passent par ce point double sans être tangents en ce point au cône S_1 . Imaginons qu'on ait pris le tétraèdre de référence de la manière suivante : le plan $U_1 = 0$ sera le plan passant par les sommets des trois cônes S_1, S_2, S_3 ; le sommet opposé sera pris sur le diamètre conjugué du plan U_1 par rapport au cône S_1 .

Enfin, les plans U_2, U_3, U_4 seront les plans passant par ce sommet et par les trois côtés du triangle ayant pour sommets les sommets des cônes S_1, S_2, S_3 . On pourra mettre les équations de ces cônes sous les formes suivantes :

$$S_1 : U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0,$$

$$S_2 : U_1^2 + \alpha U_3^2 + 2 U_1 U_4 = 0,$$

$$S_3 : (\alpha - 1) U_1^2 + \alpha U_2^2 - 2 U_1 U_4 = 0.$$

Toute transformation linéaire qui fait revenir la courbe sur elle-même ne doit pas changer le cône S_1 , et les cônes S_2 et S_3 ne doivent pas être changés non plus, à moins de se permuter. Il en résulte que le plan $U_1 = 0$ doit être invariable par toute substitution de cette nature; les plans $U_2 = 0, U_3 = 0$ doivent aussi être invariables, à moins de se permuter entre eux, et le plan $U_4 = 0$ doit se changer en un plan passant par l'intersection des plans $U_1 = 0, U_4 = 0$. Toutes les substitutions possibles sont comprises dans le Tableau suivant :

$$U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \pm \lambda U_2, \quad U_3 = \pm \lambda U_3, \quad U_4 = \lambda U_4,$$

$$U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \pm \lambda U_3, \quad U_3 = \pm \lambda U_2, \quad U_4 = \frac{\lambda}{2} (\alpha - 2) U_1 - \lambda U_4,$$

λ étant une constante arbitraire. Toutes ces substitutions changent en elles-mêmes la relation $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 0$, qui peut s'écrire

$$(18) \quad U_1^2 = V_1 V_2,$$

en posant

$$V_1 = U_2 \sqrt{-1} + U_3,$$

$$V_2 = U_2 \sqrt{-1} - U_3;$$

il en résulte que V_1, V_2 sont les carrés des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes (n° 2); on aura

$$V_1 = x_1^2,$$

$$V_2 = x_2^2,$$

$$U_1 = x_1 x_2.$$

La variable x décrivant un contour fermé quelconque, nous savons que les valeurs finales de V_1, V_2 seront de l'une des for-

mules

$$\begin{aligned}(V_1)' &= \lambda V_1, & (V_2)' &= \lambda V_2, \\ (V_1)' &= \lambda V_1, & (V_2)' &= -\lambda V_2, \\ (V_1)' &= \lambda V_2, & (V_2)' &= \lambda V_1, \\ (V_1)' &= \lambda V_2, & (V_2)' &= -\lambda V_1;\end{aligned}$$

par suite, les valeurs finales de y_1^2, y_2^2 seront de même forme. Il en résulte que les dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx}, \quad \frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{dx}$$

seront racines d'une équation du second degré à coefficients uniformes. Cela posé, supposons que dans l'équation du second ordre qui admet pour intégrales y_1, y_2 on ait fait disparaître le coefficient de $\frac{dy}{dx}$; la relation

$$y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = C$$

peut s'écrire

$$y_1 y_2 \left(\frac{1}{y_1} \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{dx} \right) = C;$$

elle montre que le produit $y_1 y_2$ ne peut prendre que deux valeurs égales et de signes contraires; donc le produit $y_1^2 y_2^2$ est une fonction uniforme de la variable. D'un autre côté, puisque, par un contour fermé décrit par x , y_1^2 se change en λy_1^2 ou λy_2^2 , et de même y_2^2 en $\pm \lambda y_1^2$ ou $\pm \lambda y_2^2$, le produit $y_1^2 y_2^2$ se change en $\pm \lambda^2 y_1^2 y_2^2$. Comme le produit $y_1^2 y_2^2$ est uniforme, on aura $\lambda^2 = \pm 1$; il suit de là que y_1^8 et y_2^8 sont racines d'une équation quadratique à coefficients uniformes. Si donc on pose $y^8 = z$, z sera donné par une équation telle que

$$(19) \quad z^2 + Pz + Q = 0,$$

P et Q étant des fonctions uniformes, puisque le produit $y_1^2 y_2^2$ est uniforme. Un système fondamental d'intégrales de l'équation (7) sera formé par

$$y_1^2, \quad y_2^2, \quad y_1 y_2, \quad \frac{y_1^4 - y_2^4}{y_1 y_2}.$$

10. La biquadratique gauche peut avoir un point de rebrous-

sement; il n'existe alors que deux cônes du second degré passant par cette courbe : l'un d'eux S_1 ayant son sommet au point de rebroussement, le second S_2 passant par ce même point et tangent en ce point au premier. Je prendrai un tétraèdre de référence formé de la manière suivante : soit U_1 le plan tangent commun aux deux cônes. J'appelle U_2 le second plan tangent mené par le sommet de S_2 au cône S_1 . Je prendrai pour U_3 le plan des deux génératrices de contact du cône S_1 avec les plans U_1 et U_2 , et pour U_4 le plan tangent à S_2 le long de la seconde génératrice d'intersection de ce cône avec U_2 . Les équations de la biquadratique gauche pourront être mises sous la forme

$$(20) \quad \begin{cases} U_3^2 - U_1 U_2 = 0, \\ U_2^2 - U_1 U_4 = 0. \end{cases}$$

Toute transformation qui fait revenir la biquadratique gauche sur elle-même ne doit pas changer les cônes S_1 et S_2 , ni par suite les plans U_1, U_2, U_3, U_4 qui sont liés invariablement à ces deux cônes. Il en résulte que ces transformations seront de la forme

$$U_1 = \lambda U_1, \quad U_2 = \mu U_2, \quad U_3 = \nu U_3, \quad U_4 = \rho U_4;$$

inversement toute transformation de cette nature n'altère pas la biquadratique pourvu que les constantes λ, μ, ν, ρ vérifient les relations

$$\nu^2 = \lambda\mu, \quad \mu^2 = \lambda\rho.$$

On voit que les quatre dérivées logarithmiques

$$\frac{1}{U_1} \frac{dU_1}{dx}, \quad \frac{1}{U_2} \frac{dU_2}{dx}, \quad \frac{1}{U_3} \frac{dU_3}{dx}, \quad \frac{1}{U_4} \frac{dU_4}{dx}$$

seront des fonctions uniformes de la variable $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$, et l'on aura

$$U_1 = e^{\int f_1(x) dx}, \quad U_2 = e^{\int f_2(x) dx}, \quad U_3 = e^{\int f_3(x) dx}, \quad U_4 = e^{\int f_4(x) dx}.$$

Les relations (20) deviennent

$$(21) \quad \begin{cases} 2 f_3(x) = f_1 + f_2, \\ 2 f_2(x) = f_1 + f_4; \end{cases}$$

réciroquement si f_1, f_2, f_3, f_4 sont quatre fonctions uniformes

vérifiant les relations (21), il est clair que U_1, U_2, U_3, U_4 sont quatre intégrales d'une équation du quatrième ordre à coefficients uniformes, vérifiant les relations (20).

II. Je suppose en dernier lieu que la courbe d'intersection se compose d'une génératrice commune et d'une cubique gauche. Faisant abstraction de la génératrice, la question revient à trouver les transformations linéaires qui font revenir sur elle-même une cubique gauche. J'emploierai, pour traiter ce dernier problème, le raisonnement employé aux n^{os} 2 et 3. Il existe, comme on sait, une infinité de cônes du second degré passant par la cubique; soient S_1 et S_2 deux de ces cônes et L_1 la génératrice commune. Soit U_2 le plan tangent à S_1 le long de L_1 et L_2 la seconde génératrice d'intersection de U_2 avec S_2 ; soit de même U_3 le plan tangent à S_2 le long de L_1 et L_3 la seconde génératrice d'intersection de U_3 avec S_1 . Soient encore U_1 le plan tangent à S_2 le long de L_2 et U_4 le plan tangent à S_1 le long de L_3 . En prenant pour tétraèdre de référence le tétraèdre formé par les quatre plans U_1, U_2, U_3, U_4 , les équations de la cubique ou les relations entre un système fondamental de l'équation (7) pourront s'écrire

$$(22) \quad \begin{cases} U_2^2 = U_1 U_3, \\ U_3^2 = U_2 U_4; \end{cases}$$

soient, comme plus haut, $(U_1)', (U_2)', (U_3)', (U_4)'$ les valeurs que prennent ces intégrales après que la variable a décrit un contour fermé; les relations

$$(23) \quad \begin{cases} (U_2')^2 = U_1' U_3', \\ (U_3')^2 = U_2' U_4'; \end{cases}$$

devront être des conséquences des relations (22). En éliminant entre les équations (22) et une des nouvelles équations (23) deux des quantités U_1, U_2, U_3, U_4 , on devra être conduit à une identité. Pour faire cette élimination, je pose

$$\omega = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3};$$

on en tire

$$U_2 = \omega U_1, \quad U_3 = \omega^2 U_1, \quad U_4 = \omega^3 U_1;$$

la première des relations (23) devient

$$(24) \quad \begin{cases} (h\omega^3 + g\omega^2 + f\omega + e)^2 \\ = (d\omega^3 + c\omega^2 + b\omega + a)(h'\omega^3 + g'\omega^2 + f'\omega + e'), \end{cases}$$

et doit être satisfaite pour toute valeur de ω . Les quantités d, h, d', h' ne pouvant être nulles en même temps, supposons $h \neq 0$; on aura aussi $h' \neq 0, d \neq 0$. Supposons d'abord

$$h\omega^3 + g\omega^2 + f\omega + e = h(\omega - \alpha)(\omega - \beta)(\omega - \gamma),$$

α, β, γ étant trois nombres différents. Les polynômes qui figurent dans le second membre de la relation (24) ne peuvent contenir les trois facteurs simples $\omega - \alpha, \omega - \beta, \omega - \gamma$; car ces polynômes seraient identiques à un facteur constant près, et l'on aurait $\Delta = 0$. Il faudra donc que chacun d'eux contienne un facteur double et un facteur simple; on aura, par exemple,

$$\begin{aligned} d\omega^2 + c\omega + b\omega + a &= d(\omega - \alpha)^2(\omega - \beta), \\ h'\omega^3 + g'\omega^2 + f'\omega + e' &= h'(\omega - \beta)^2(\omega - \gamma)^2 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\frac{(U_2)'}{(U_1)'} = \frac{h\omega^3 + g\omega^2 + f\omega + e}{d\omega^3 + c\omega^2 + b\omega + a} = \frac{h(\omega - \gamma)}{d(\omega - \alpha)}.$$

Si $h\omega^3 + g\omega^2 + f\omega + e$ est le produit d'un facteur double $\omega - \alpha$ par un facteur simple $\omega - \beta$, l'un des polynômes du second membre de (24) contiendra un facteur triple et l'autre un facteur double et un facteur simple, ou bien tous les deux contiendront un facteur double et un facteur simple. Ce dernier cas est à rejeter, car les deux polynômes seraient identiques. Dans le premier cas, on aura

$$\begin{aligned} d\omega^3 + c\omega^2 + b\omega + a &= d(\omega - \alpha)^3, \\ h'\omega^3 + g'\omega^2 + f'\omega + e' &= h'(\omega - \alpha)(\omega - \beta)^2, \end{aligned}$$

et le produit $\frac{(U_2)'}{(U_1)'}$ se réduit à $\frac{h(\omega - \beta)}{d(\omega - \alpha)}$.

Enfin, si $h\omega^3 + g\omega^2 + f\omega + e$ contenait un facteur triple, les trois polynômes seraient identiques. En résumé, dans tous les cas qui peuvent se présenter, lorsque la variable décrit un contour

fermé, ω se change en une expression de la forme

$$\frac{\lambda\omega + \mu}{\nu\omega + \rho},$$

λ, μ, ν, ρ étant des constantes qui ne dépendent que du chemin suivi par la variable. Il en résulte, en employant toujours la même notation, que $H(\omega)$ est une fonction uniforme de la variable. Soit $P(x)$ cette fonction; considérons l'équation linéaire

$$(25) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} P(x) y = 0;$$

on pourra choisir deux intégrales y_1, y_2 telles que leur rapport soit égal à ω . On aura

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \frac{U_4}{U_3}$$

ou bien

$$\frac{U_1}{y_1^3} = \frac{U_2}{y_1^2 y_2} = \frac{U_3}{y_1 y_2^2} = \frac{U_4}{y_2^3}.$$

Soit $F(Z) = 0$ l'équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes qui admet pour intégrales les cubes des intégrales de l'équation (25); un système fondamental d'intégrales de cette équation sera formé par

$$y_1^3, y_1^2 y_2, y_1 y_2^2, y_2^3.$$

On passera de l'équation $F(Z) = 0$ à l'équation (7) en posant

$$Z = \frac{1}{\varphi(x)} u;$$

$\varphi(x)$ étant de la forme $e^{\int \psi(x) dx}$, où $\psi(x)$ est une fonction uniforme.

Les intégrales de l'équation (7) seront

$$y_1^3 e^{\int \psi(x) dx}, y_1^2 y_2 e^{\int \psi(x) dx}, y_1 y_2^2 e^{\int \psi(x) dx}, y_2^3 e^{\int \psi(x) dx}.$$

Si dans l'équation (25) on pose $x = \frac{1}{\sqrt[3]{\varphi(x)}} z$, les intégrales de l'équation (7) seront les cubes des intégrales de l'équation en z .
 Donc :

THÉOREME IV. — *Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient deux relations homogènes du second degré, pouvant être mises sous la forme (22), les intégrales de cette équation sont les cubes des intégrales d'une équation linéaire du second ordre à coefficients uniformes.*

12. Voici comment on pourra former l'équation générale du quatrième ordre de cette nature. Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = H y;$$

en posant $u = y^3$, on aura successivement

$$\frac{du}{dx} = 3 y^2 \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 3 H y^3 + 6 y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = 3 H' y^3 + 21 H y^2 \frac{dy}{dx} + 6 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3,$$

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = (3 H'' + 21 H^2) y^3 + 30 H' y^2 \frac{dy}{dx} + 60 H y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2;$$

en éliminant entre ces cinq équations y^3 , $y^2 \frac{dy}{dx}$, $y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$, $\left(\frac{dy}{dx} \right)^3$, on aboutit à l'équation suivante :

$$(26) \quad \frac{d^4 u}{dx^4} - 10 H \frac{d^2 u}{dx^2} - 10 H' \frac{du}{dx} + (9 H^2 - 3 H'') u = 0.$$

Pour obtenir l'équation la plus générale du type demandé, il suffira de faire la transformation $u = \varphi(x) U$, $\varphi(x)$ étant une fonction quelconque de x , elle contiendra deux fonctions arbitraires H et $\varphi(x)$. Pour qu'une équation du quatrième ordre réponde à la question, il suffira qu'elle soit de la forme (26), quand on aura fait disparaître le second terme, et l'on a tout de suite la valeur correspondante de H .

13. J'ai déjà fait remarquer que le problème traité revient à la recherche des substitutions linéaires qui font revenir sur elle-même, soit une surface du second degré, soit une biquadratique

ou une cubique gauche. On voit par là de quelle importance est, dans la théorie des équations linéaires, l'étude des substitutions linéaires qui reproduisent une forme donnée. Sans aborder ici cette étude dans toute sa généralité, il est bien aisé de mettre en évidence le lien intime qui existe entre ces deux questions. Soit $F(y) = 0$ une équation différentielle linéaire d'ordre m à coefficients uniformes et

$$(27) \quad f(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

une relation homogène d'ordre n entre m intégrales $y_1, y_2, \dots, y_m$ formant un système fondamental. Supposons qu'entre ces intégrales il n'existe pas d'autre relation homogène de même degré. Soient $y'_1, y'_2, \dots, y'_m$ les valeurs nouvelles de ces intégrales après un contour fermé décrit par la variable; la relation

$$f(y'_1, y'_2, \dots, y'_m) = 0$$

devra être identique avec la relation (27). Le groupe de l'équation $F(y) = 0$ ne contiendra donc que des substitutions reproduisant la forme homogène $f(y_1, y_2, \dots, y_m)$. Si ces dernières substitutions sont en nombre limité, en considérant comme identiques celles qui ne diffèrent que par un facteur constant, on en conclura comme au n° 8 que la dérivée logarithmique d'une intégrale quelconque n'admet, pour chaque valeur de la variable, qu'un nombre limité de valeurs; puis, si l'on fait disparaître le coefficient de $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ dans l'équation proposée, le même raisonnement montre que chaque intégrale n'admettra, pour une valeur particulière de la variable, qu'un nombre limité de valeurs différentes.

Si l'équation $F(y) = 0$ a toutes ses intégrales régulières, on voit que l'intégrale générale s'exprimera au moyen de fonctions algébriques.

Plus généralement, supposons que les intégrales $y_1, y_2, \dots, y_m$ vérifient une relation algébrique de degré n ; cette relation pourra s'écrire, en groupant ensemble les termes de même degré :

$$(28) \quad \varphi_n(y_1, y_2, \dots, y_m) + \varphi_{n-1}(y_1, y_2, \dots, y_m) + \dots + \varphi_0(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0$$

S'il n'existe entre ces intégrales aucune autre relation de degré égal ou inférieur à n , la relation obtenue en remplaçant $x_1, x_2, \dots, x_m$ par $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ devra être identique à (28). Il en résulte que les groupes homogènes $\varphi_n, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_p$ devront se reproduire identiquement, et le groupe de l'équation ne contiendra que des substitutions linéaires qui reproduisent à la fois les formes homogènes $\varphi_p, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$. Si le nombre des substitutions qui reproduisent l'une de ces formes est limité, on en tirera les mêmes conséquences que tout à l'heure.

Si l'équation $F(x) = 0$ est du troisième ordre, toute relation homogène de degré n entre les intégrales $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ peut être regardée comme l'équation, en coordonnées homogènes, d'une courbe plane et l'on se trouve amené à la recherche des substitutions linéaires qui n'altèrent pas une courbe plane. Le cas d'une conique est celui qui a été traité antérieurement (n° 2); il y a une infinité de substitutions répondant à la question. Mais, si

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représente une courbe *indécomposable* d'un degré supérieur au second, il est bien aisé de voir qu'il n'y a, en général, qu'un nombre fini de substitutions linéaires reproduisant cette courbe. Il suffit d'employer un raisonnement analogue à celui qui a été employé par M. Poincaré, dans le cas des cubiques (*Journal de l'École Polytechnique*, L^e Cahier). On sait qu'il existe toujours, pour une courbe plane d'un degré supérieur au second, un certain nombre de points singuliers et de droites singulières : points doubles, points d'inflexion, points de rebroussement, tangentes doubles. Toute substitution linéaire qui reproduit la courbe devant changer un point singulier en un point singulier de même nature, il s'ensuit que le nombre des substitutions possibles est forcément limité. Le résultat auquel on se trouve conduit est précisément le résultat qui a été obtenu par M. Fuchs.

Il faut pourtant remarquer que, si l'on a une courbe ayant des singularités élevées, il peut en être autrement. Considérons, par exemple, une cubique ayant un point de rebroussement. Prenons pour côtés du triangle de référence les tangentes au point de rebroussement et au point d'inflexion la droite qui joint ces deux

points; l'équation de la cubique sera de la forme

$$x^3 - y^2 z = 0.$$

Il y a une infinité de substitutions linéaires qui reproduisent cette courbe et qui sont de la forme

$$x = \lambda X, \quad y = \mu Y, \quad z = \nu Z,$$

avec la condition $\lambda^3 = \mu^2 \nu$. On en conclut, comme au n° 10, que toute équation du troisième ordre à coefficients uniformes, dont les intégrales vérifient la relation

$$U_1^3 = U_2^2 U_3,$$

admet un système fondamental d'intégrales

$$U_1 = e^{\int f_1(x) dx}, \quad U_2 = e^{\int f_2(x) dx}, \quad U_3 = e^{\int f_3(x) dx},$$

où $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ sont des fonctions uniformes vérifiant la relation

$$3f_1(x) = 2f_2(x) + f_3(x).$$

Ce cas est analogue, comme on voit, au cas d'une biquadratique gauche ayant un point de rebroussement.

Tout pareillement, si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes vérifient une relation homogène d'ordre n

$$f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

et une seule, le groupe de l'équation ne contiendra que des substitutions linéaires reproduisant la surface représentée par l'équation $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$. Si cette relation est du second degré, on a vu que ces substitutions étaient en nombre infini. Dans le cas où l'équation est de degré supérieur au second, on déduit de considérations géométriques analogues aux précédentes que ces substitutions seront en nombre limité, sauf dans certains cas que l'on peut regarder comme exceptionnels.

Sur le problème des fous ; par M. JOSEPH PEROTT.

(Séance du 16 novembre 1883.)

Ce problème bien connu est le suivant :

Placer un nombre donné de fous sur l'échiquier, de manière qu'aucun fou ne puisse être pris par un autre.

C'est le nombre des solutions de ce problème que je me propose de rechercher.

I.

Tout le monde sait qu'un fou placé sur une case blanche ne peut en prendre un autre qui se trouve sur une case noire, et inversement; donc on peut considérer séparément les fous qui sont placés sur des cases noires et ceux qui se trouvent sur des cases blanches. Le problème principal peut être résolu, par conséquent, à l'aide du problème auxiliaire suivant :

Placer un nombre donné de fous sur les cases noires de l'échiquier, de manière qu'ils ne puissent se prendre mutuellement.

Mais, avant d'aborder ce problème, je me propose d'en traiter un autre qui pourra servir de lemme.

II.

Problème des tours sur un échiquier rectangulaire.

Traçons dans un plan vertical m lignes horizontales et n lignes verticales équidistantes; ces lignes, que nous désignerons sous le nom de *lignes fondamentales*, donneront mn points d'intersection, qui pourront être considérés comme étant les centres des cases d'un échiquier rectangulaire à mn cases. Le problème des tours consiste à placer un nombre donné de tours sur cet échiquier, de manière qu'aucune tour ne puisse être prise par un autre.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $m \leq n$, il est évident que le problème des tours n'est possible que dans le cas où le nombre des tours est inférieur ou égal à m . Nous désignerons l'échiquier à mn cases par A_3 . Supposons maintenant qu'on partage l'échiquier A_3 en deux régions quelconques, que nous désignerons sous les noms d'*échiquiers* A_1 et A_2 ; je me propose de faire voir que si le problème des tours est résolu pour l'échiquier A_1 , je veux dire pour tous les nombres des tours depuis 1 jusqu'à m , il est toujours possible de le résoudre pour l'échiquier A_2 . Je désignerai, en général, par A^k le nombre des solutions du problème des k tours sur l'échiquier A . Cela étant ainsi, il est évident que les solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_3 peuvent être distribuées en $k + 1$ classes suivantes.

1° Toutes les k tours se trouvent sur l'échiquier A_1 . Nous désignerons le nombre de ces solutions par A_1^k .

2° Il y a $k - 1$ tours sur l'échiquier A_1 et 1 tour sur l'échiquier A_2 . Soit $A_1^{k-1} A_2^1$ le nombre de ces solutions.

.....

$s + 1$. Il y a $k - s$ tours sur l'échiquier A_1 et s tours sur l'échiquier A_2 . Soit $A_1^{k-s} A_2^s$ le nombre de ces solutions.

.....

$k + 1$. Toutes les k tours se trouvent sur l'échiquier A_2 . Soit A_2^k le nombre de ces solutions.

On aura évidemment

$$A_1^k + A_1^{k-1} A_2^1 + \dots + A_1^{k-s} A_2^s + \dots + A_2^k = A_3^k.$$

Je suppose donc qu'on connaisse les nombres

$$A_1^1, A_1^2, A_1^3, \dots, A_1^m,$$

et puis les nombres

$$A_1^{k-1} A_2^1, A_1^{k-2} A_2^2, \dots, A_1^{k-s} A_2^s, \dots, A_2^k,$$

et je me propose de faire voir comment on pourra déterminer les

nombre

$$A_1^k A_2^1, A_1^{k-1} A_2^2, \dots, A_1^{k-t+1} A_2^t, \dots, A_2^{k+1}.$$

Prenons pour point de départ une solution quelconque du problème des k tours sur l'échiquier A_1 , de manière que les tours se trouvent placées sur les points

$$a'_1, a''_1, \dots, a_1^{(k)}.$$

Il y aura $n - k$ lignes et $m - k$ colonnes de libres, qui donneront $(m - k)(n - k)$ points d'intersection sur chacun desquels on pourra placer la $k + 1^{\text{ème}}$ tour. On aura de cette manière, en prenant pour point de départ toutes les solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_1 , $(m - k)(n - k) A_1^k$ solutions du problème des $k + 1$ tours sur l'échiquier A_3 . Ces solutions appartiendront évidemment aux deux premières classes. De plus, les solutions de la première classe s'obtiennent de cette manière chacune $k + 1$ fois; car si, en partant de la position

$$a'_1, a''_1, \dots, a_1^{(k)},$$

on avait obtenu la position $(^2)$

$$a'_1, a''_1, \dots, a_1^{(k)}, a_1^{(k+1)},$$

cette même position pourrait aussi s'obtenir en partant d'une autre combinaison quelconque de k lettres prises parmi les $k + 1$ lettres précédentes. Les solutions de la deuxième classe ne s'obtiendront qu'une seule fois. On écrira, par conséquent,

$$(m - k)(n - k) A_1^k = (k + 1) A_1^{k+1} + A_1^k A_2^1,$$

ce qui détermine $A_1^k A_2^1$.

Je suppose qu'on soit parvenu de cette manière à déterminer tous les nombres

$$A_1^k A_2^1, A_1^{k-1} A_2^2, \dots, A_1^{k-t+2} A_2^{t-1},$$

(¹) Il est inutile d'avertir qu'on suppose $k < m$, sans cela tous les nombres suivants seraient des zéros.

(²) Nous désignerons, en général, par a_1 un point de l'échiquier A_1 , par a_2 un point de l'échiquier A_2 , et enfin par a_3 un point de l'échiquier A_3 .

et je veux montrer comment on pourra déterminer ⁽¹⁾

$$A_1^{k-t+1} A_2^t.$$

Partons d'une solution de la $t^{\text{ième}}$ classe du problème des k tours sur l'échiquier A_3

$$a'_2, a''_2, \dots, a_1^{(k-t+1)}; a'_2, a''_2, \dots, a_2^{(t-1)};$$

il y aura $n - k$ lignes et $m - k$ colonnes de libres qui donneront $(m - k)(n - k)$ points d'intersection sur chacun desquels on pourra placer la $k + 1^{\text{ième}}$ tour. On obtient de cette manière, en partant de toutes les solutions de la $t^{\text{ième}}$ classe du problème des k tours sur l'échiquier A_3 , $(m - k)(n - k) A_1^{k-t+1} A_2^{t-1}$ solutions du problème des $k + 1$ tours sur l'échiquier A_3 , qui appartiendront évidemment aux classes t et $t + 1$. Mais on voit que les solutions de la classe t s'obtiendront chacune $k - t + 2$ fois et celles de la classe $t + 1$, t fois, de sorte qu'on peut écrire

$$(m - k)(n - k) A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k - t + 2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t+1} A_2^t,$$

ce qui détermine $A_1^{k-t+1} A_2^t$. Cette formule de récursion permet d'obtenir tous les autres nombres, si l'on connaît les nombres suivants :

$$A_1^1, A_1^2, A_1^3, \dots, A_1^m.$$

En effet, on a évidemment

$$A_2^1 = mn - A_1^1;$$

puis, en faisant $k = 1$, $t = 1, 2$, on obtient successivement les nombres

$$A_1^1, A_2^1, A_2^2,$$

et ainsi de suite. On obtient aussi de cette manière le nombre des solutions du problème des k tours sur l'échiquier A_3 ; mais il est plus facile de l'obtenir directement à l'aide de la formule

$$A_3^k = mn \frac{(m-1)(n-1)}{2} \frac{(m-2)(n-2)}{3} \dots \frac{(m-k+1)(n-k+1)}{k}.$$

Il convient maintenant d'appliquer la théorie précédente à quelques exemples particuliers.

⁽¹⁾ Je suppose qu'on ait $k + 1 \geq t$; dans le cas contraire, il n'y aurait rien à chercher. Quand l'indice d'une lettre devient égal à zéro, cette lettre est à supprimer.

III.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 4 cases.

On obtient directement, à l'aide de la formule que nous avons donnée, en y faisant $m = n = 2$ et $k = 1, 2$,

$$A_3^1 = 2^2 = 4,$$

$$A_3^2 = 2^2 \frac{1 \cdot 1}{2} = 2,$$

ce qui veut dire que le problème d'une tour a quatre solutions sur l'échiquier carré à 4 cases, et que le problème des 2 tours n'admet que deux solutions.

IV.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 16 cases.



Je partagerai cet échiquier, que je désignerai par A_3 , en deux, dont un contiendra les points marqués d'une croix, et l'autre les autres points. Je désignerai ces échiquiers par A_2 et A_1 respectivement. L'échiquier A_1 , considéré à part, n'est autre chose qu'un échiquier carré à 4 cases, et l'on aura, par conséquent,

$$A_1^1 = 4,$$

$$A_1^2 = 2,$$

$$A_1^3 = 0,$$

$$A_1^4 = 0;$$

ce qui nous permet de résoudre le problème des tours sur l'échiquier A_2 . On a évidemment

$$A_2^1 = 16 - 4 = 12.$$

La formule récurrente deviendra, en y faisant $m = n = 4$,

$$(4 - k)^2 A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k - t + 2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t+1} A_2^t.$$

Puis, en faisant successivement

$$k = 1, t = 1, 2; \quad k = 2, t = 1, 2, 3; \quad k = 3, t = 1, 2, 3, 4,$$

on obtient

$$9A_1^1 = 2A_1^2 + A_1^1 A_2^1,$$

$$36 = 4 + A_1^1 A_2^1,$$

$$A_1^1 A_2^1 = 32,$$

$$9A_2^1 = A_1^1 A_2^1 + 2A_2^2,$$

$$108 = 32 + 2A_2^2,$$

$$A_2^2 = 38,$$

$$4A_1^2 = 3A_1^3 + A_1^2 A_2^1,$$

$$8 = A_1^2 A_2^1,$$

$$4A_1^1 A_2^1 = 2A_1^2 A_2^1 + 2A_1^1 A_2^2,$$

$$128 = 16 + 2A_1^1 A_2^2,$$

$$A_1^1 A_2^2 = 56,$$

$$4A_2^2 = A_1^1 A_2^2 + 3A_2^3,$$

$$152 = 56 + 3A_2^3,$$

$$A_2^3 = 32,$$

$$A_1^3 A_2^1 = 0,$$

$$A_1^2 A_2^1 = 3A_1^3 A_2^1 + 2A_1^2 A_2^2,$$

$$8 = 2A_1^2 A_2^2,$$

$$A_1^2 A_2^2 = 4,$$

$$A_1^1 A_2^2 = 2A_1^2 A_2^2 + 3A_1^1 A_2^3,$$

$$56 = 8 + 3A_1^1 A_2^3,$$

$$A_1^1 A_2^3 = 16,$$

$$A_2^3 = A_1^1 A_2^3 + 4A_2^4,$$

$$32 = 16 + 4A_2^4,$$

$$A_2^4 = 4.$$

On voit que le problème des tours, sur l'échiquier A_2 à 12 cases, défini précédemment, a 12, 38, 32 ou 4 solutions, selon que le nombre des tours est égal à 1, 2, 3 ou 4.

V.

Problème des tours sur l'échiquier carré à 36 cases.

.	.	.	.	.	.
.	.	×	×	.	.
.	×	×	×	×	.
.	×	×	×	×	.
.	.	×	×	.	.
.	.	.	.	.	.

Je désignerai cette fois-ci l'échiquier contenant les *croix* par A_1 , l'échiquier contenant les *points* par A_2 , et enfin l'échiquier entier par A_3 .

L'échiquier A_1 est le même que celui que nous avons désigné dans le problème précédent par A_2 , ce qui donne

$$A_1^1 = 12,$$

$$A_1^2 = 38,$$

$$A_1^3 = 32,$$

$$A_1^4 = 4;$$

puis, on a évidemment

$$A_2^1 = 36 - 12 = 24.$$

La formule de récursion devient, en y faisant $m = n = 6$,

$$(6 - k)^2 A_1^{k-t+1} A_2^{t-1} = (k - t + 2) A_1^{k-t+2} A_2^{t-1} + t A_1^{k-t+1} A_2^t.$$

En faisant successivement

$$k = 1, t = 1, 2; \quad k = 2, t = 1, 2, 3; \quad k = 3, t = 1, 2, 3, 4;$$

$$k = 4, t = 1, 2, 3, 4, 5; \quad k = 5, t = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

on obtient

$$25 A_1^1 = 2 A_1^2 + A_1^1 A_2^1,$$

$$300 = 76 + A_1^4 A_2^1.$$

$$= 180 -$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^1 = 224,$$

$$25 \Lambda_2^1 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_2^2,$$

$$600 = 224 + 2 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_2^2 = 188,$$

$$16 \Lambda_1^2 = 3 \Lambda_1^3 + \Lambda_1^2 \Lambda_2^1,$$

$$608 = 96 + \Lambda_1^2 \Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^1 = 512,$$

$$16 \Lambda_1^1 \Lambda_2^1 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^1 \Lambda_2^2,$$

$$3584 = 1024 + 2 \Lambda_1^1 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^2 = 1280,$$

$$16 \Lambda_2^2 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_2^3,$$

$$3008 = 1280 + 3 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_2^3 = 576,$$

$$9 \Lambda_1^3 = 4 \Lambda_1^4 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^1,$$

$$288 = 16 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^1 = 272,$$

$$9 \Lambda_1^2 \Lambda_2^1 = 3 \Lambda_1^3 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2,$$

$$4608 = 816 + 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = 1896,$$

$$9 \Lambda_1 \Lambda_2^2 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3,$$

$$11520 = 3792 + 3 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^3 = 2576,$$

$$9 \Lambda_2^3 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^3 + 4 \Lambda_2^4,$$

$$5184 = 2576 + 4 \Lambda_2^4,$$

$$\Lambda_2^4 = 652,$$

$$4 \Lambda_1^4 = 5 \Lambda_1^5 + \Lambda_1^4 \Lambda_2^1,$$

$$16 = \Lambda_1^4 \Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^4 \Lambda_2^1 = 16,$$

$$4 \Lambda_1^3 \Lambda_2^1 = 4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2,$$

$$1088 = 64 + 2 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^2 = 512,$$

$$4 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = 3 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3,$$

$$7584 = 1536 + 3 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^3 = 2016,$$

$$4 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3 + 4 \Lambda_1^1 \Lambda_2^4,$$

$$10304 = 4032 + 4A_1^4A_2^4,$$

$$A_1A_2^4 = 1568,$$

$$4A_2^4 = A_1^4A_2^4 + 5A_2^5,$$

$$2608 = 1568 + 5A_2^5,$$

$$A_2^5 = 208,$$

$$A_1^4A_2^4 = 5A_1^5A_2^4 + 2A_1^4A_2^5,$$

$$16 = 2A_1^4A_2^5,$$

$$A_1^4A_2^5 = 8,$$

$$A_1^3A_2^2 = 4A_1^4A_2^2 + 3A_1^3A_2^3,$$

$$512 = 32 + 3A_1^3A_2^3.$$

$$A_1^3A_2^3 = 160,$$

$$A_1^2A_2^3 = 3A_1^3A_2^3 + 4A_1^2A_2^4,$$

$$2016 = 480 + 4A_1^2A_2^4,$$

$$A_1^2A_2^4 = 384,$$

$$A_1^2A_2^4 = 2A_1^2A_2^5 + 5A_1^3A_2^5,$$

$$1568 = 768 + 5A_1^3A_2^5,$$

$$A_1^3A_2^5 = 160,$$

$$A_2^5 = A_1^4A_2^5 + 6A_2^6,$$

$$208 = 160 + 6A_2^6,$$

$$A_2^6 = 8.$$

VI.

Problème des tours sur l'échiquier rectangulaire à 56 cases.

.	.	.	×	.	.	.
.	.	×	×	×	.	.
.	×	×	×	×	×	.
×	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×
.	×	×	×	×	×	.
.	.	×	×	×	.	.
.	.	.	×	.	.	.

Je désignerai par A_1 l'échiquier qui contient les points, par A_2 l'échiquier qui contient les croix et par A_3 l'échiquier entier. L'échiquier A_1 est évidemment équivalent au point de vue du problème des tours à l'échiquier A_2 du problème précédent; quelques lignes sont plus éloignées les unes des autres dans le nouvel échiquier qu'elles ne l'étaient dans l'ancien; mais les points qui étaient sur une même ligne fondamentale le sont encore. Nous pouvons écrire, par conséquent.

$$\Lambda_1^1 = 24.$$

$$\Lambda_1^2 = 188,$$

$$\Lambda_1^3 = 576.$$

$$\Lambda_1^4 = 652,$$

$$\Lambda_1^5 = 208.$$

$$\Lambda_1^6 = 8.$$

$$\Lambda_1^7 = 0.$$

De plus, on a évidemment

$$A_2^1 = 56 - 24 = 32.$$

La formule de récursion devient, en faisant $m = 7$, $n = 8$,

$$(7-k)(8-k)A_1^{k-t+1}A_2^{t-1} = (k-t+2)A_1^{k-t+2}A_2^{t-1} + tA_1^{k-t+1}A_2^t;$$

puis, en faisant successivement,

$$k = 1, t = 1, 2; \quad k = 2, t = 1, 2, 3; \quad k = 3, t = 1, 2, 3, 4;$$

$$k = 4, t = 1, 2, 3, 4, 5; \quad k = 5, t = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$k = 6, t = 1, 2, 3, 4, 5, 7,$$

on obtient

$$42\Lambda_1^1 = 2\Lambda_1^2 + \Lambda_1^1\Lambda_2^1,$$

$$1008 = 376 + \Lambda_1^1\Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^1\Lambda_2^1 = 632,$$

$$42\Lambda_2^1 = \Lambda_1^1\Lambda_2^1 + 2\Lambda_2^2,$$

$$1344 = 632 + 2\Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_2^2 = 356,$$

$$30\Lambda_1^2 = 3\Lambda_1^3 + \Lambda_1^2\Lambda_2^1,$$

$$5640 = 1728 + \Lambda_1^2\Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^1 = 3912,$$

$$30 \Lambda_1^1 \Lambda_2^1 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^1 \Lambda_2^2,$$

$$18960 = 7824 + 2 \Lambda_1^1 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^2 = 5568,$$

$$30 \Lambda_2^2 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_2^3,$$

$$10680 = 5568 + 3 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_2^3 = 1704,$$

$$20 \Lambda_1^3 = 4 \Lambda_1^4 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^1,$$

$$11520 = 2608 + \Lambda_1^3 \Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^1 = 8912,$$

$$20 \Lambda_1^2 \Lambda_2^1 = 2 \Lambda_1^3 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2,$$

$$78240 = 26736 + 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = 25752,$$

$$20 \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3,$$

$$111360 = 51504 + 3 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^3 = 19952,$$

$$20 \Lambda_2^3 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^3 + 4 \Lambda_2^4,$$

$$34080 = 19952 + 4 \Lambda_2^4,$$

$$\Lambda_2^4 = 3532,$$

$$12 \Lambda_1^4 = 5 \Lambda_1^5 + \Lambda_1^4 \Lambda_2^1,$$

$$7824 = 1040 + \Lambda_1^4 \Lambda_2^1,$$

$$\Lambda_1^4 \Lambda_2^1 = 6784,$$

$$12 \Lambda_1^3 \Lambda_2^1 = 4 \Lambda_1^4 \Lambda_2^1 + 2 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2,$$

$$106944 = 27136 + 2 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^2 = 39904,$$

$$12 \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 = 3 \Lambda_1^3 \Lambda_2^2 + 3 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3,$$

$$309024 = 119712 + 3 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^3 = 63104,$$

$$12 \Lambda_1^1 \Lambda_2^3 = 2 \Lambda_1^2 \Lambda_2^3 + 4 \Lambda_1^1 \Lambda_2^4,$$

$$239424 = 126208 + 4 \Lambda_1^1 \Lambda_2^4,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^4 = 28304,$$

$$12 \Lambda_2^4 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^4 + 5 \Lambda_2^5,$$

$$42384 = 28304 + 5 \Lambda_2^5,$$

$$\Lambda_2^5 = 2816,$$

$$6 \Lambda_1^5 = 6 \Lambda_1^6 + \Lambda_1^5 \Lambda_2^1,$$

$$1248 = 48 + \Lambda_1^5 \Lambda_2^1,$$

$$= 184 -$$

$$\Lambda_1^5 \Lambda_2^1 = 1200,$$

$$6\Lambda_1^4 \Lambda_2^1 = 5\Lambda_1^5 \Lambda_2^1 - 2\Lambda_1^4 \Lambda_2^2,$$

$$40704 = 6000 - 2\Lambda_1^4 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^4 \Lambda_2^2 = 17352,$$

$$6\Lambda_1^3 \Lambda_2^2 = 4\Lambda_1^4 \Lambda_2^2 + 3\Lambda_1^3 \Lambda_2^3,$$

$$239424 = 69408 + 3\Lambda_1^3 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 = 56672,$$

$$6\Lambda_1^2 \Lambda_2^3 = 3\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 - 4\Lambda_1^2 \Lambda_2^4,$$

$$378624 = 170016 - 4\Lambda_1^2 \Lambda_2^4,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^4 = 52152,$$

$$6\Lambda_1^1 \Lambda_2^4 = 2\Lambda_1^2 \Lambda_2^4 - 5\Lambda_1^1 \Lambda_2^5,$$

$$169824 = 104304 - 5\Lambda_1^1 \Lambda_2^5,$$

$$\Lambda_1^1 \Lambda_2^5 = 13104,$$

$$6\Lambda_2^5 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^5 + 6\Lambda_2^6,$$

$$16896 = 13104 + 6\Lambda_2^6,$$

$$\Lambda_2^6 = 632,$$

$$2\Lambda_1^6 = 7\Lambda_1^7 + \Lambda_1^6 \Lambda_2^1,$$

$$16 = \Lambda_1^6 \Lambda_2^1,$$

$$2\Lambda_1^5 \Lambda_2^1 = 6\Lambda_1^6 \Lambda_2^1 + 2\Lambda_1^5 \Lambda_2^2,$$

$$2400 = 96 + 2\Lambda_1^5 \Lambda_2^2,$$

$$\Lambda_1^5 \Lambda_2^2 = 1152,$$

$$2\Lambda_1^4 \Lambda_2^2 = 5\Lambda_1^5 \Lambda_2^2 + 3\Lambda_1^4 \Lambda_2^3,$$

$$34704 = 5760 + 3\Lambda_1^4 \Lambda_2^3,$$

$$\Lambda_1^4 \Lambda_2^3 = 9648,$$

$$2\Lambda_1^3 \Lambda_2^3 = 4\Lambda_1^4 \Lambda_2^3 - 4\Lambda_1^3 \Lambda_2^4,$$

$$113344 = 38592 + 4\Lambda_1^3 \Lambda_2^4,$$

$$\Lambda_1^3 \Lambda_2^4 = 18688,$$

$$2\Lambda_1^2 \Lambda_2^4 = 3\Lambda_1^3 \Lambda_2^4 + 5\Lambda_1^2 \Lambda_2^5,$$

$$104304 = 56064 + 5\Lambda_1^2 \Lambda_2^5,$$

$$\Lambda_1^2 \Lambda_2^5 = 9648,$$

$$2\Lambda_1^1 \Lambda_2^5 = 2\Lambda_1^2 \Lambda_2^5 + 6\Lambda_1^1 \Lambda_2^6,$$

$$26208 = 19296 + 6\Lambda_1^1 \Lambda_2^6,$$

$$\Lambda_1 \Lambda_2^6 = 1152,$$

$$2\Lambda_2^6 = \Lambda_1^1 \Lambda_2^6 + 7\Lambda_2^7,$$

$$1264 = 1152 + 7\Lambda_2^7,$$

$$\Lambda_2^7 = 16.$$

VII.

Problème des fous sur les cases noires ⁽¹⁾ d'un échiquier ordinaire.

Nous venons donc d'obtenir, comme nombres des solutions du problème des tours sur l'échiquier A_2 à 32 cases, les nombres suivants :

$$A_2^1 = 32,$$

$$A_2^2 = 356,$$

$$A_2^3 = 1704,$$

$$A_2^4 = 3532,$$

$$A_2^5 = 2816,$$

$$A_2^6 = 632,$$

$$A_2^7 = 16.$$

Or il est évident que les 32 points de l'échiquier A_2 du § VI peuvent être considérés comme centres des 32 cases noires d'un échiquier ordinaire; la marche de la tour deviendra alors celle du fou. Donc il est possible de placer ⁽²⁾ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 fous sur les cases noires d'un échiquier ordinaire de 32, 356, 1704, 3532, 2816, 632, 16 manières différentes respectivement.

VIII.

Il est facile de résoudre maintenant le problème des fous, tel qu'on le pose ordinairement :

Déterminer le nombre des manières de placer 8 fous sur un échiquier à 64 cases.

(¹) Je ne dis *cases noires* que pour fixer les idées; on pourrait tout aussi bien mettre *cases blanches*.

(²) Je dis, pour abrégér, *placer*, au lieu de dire *placer conformément à l'énoncé du problème des fous*.

On aura

7 fous sur des cases noires, 1 fou sur une case blanche.....	$16 \times 32 =$	512
6 f. c. n., 2 f. c. bl.....	$632 \times 356 =$	224992
5 f. c. n., 3 f. c. bl.....	$2816 \times 1704 =$	4798464
4 f. c. n., 4 f. c. bl.....	$3532^2 =$	12475024
3 f. c. n., 5 f. c. bl.....	$1704 \times 2816 =$	4798464
2 f. c. n., 6 f. c. bl.....	$356 \times 632 =$	224992
1 f. c. n., 7 f. c. bl.....	$32 \times 16 =$	512
Nombre des solutions.....		22522960

Mémoire sur les surfaces développables formées par la réfraction d'un faisceau de rayons lumineux parallèles sur une courbe donnée; par M. LUCIEN LÉVY.

(Séance du 2 novembre 1883.)

Le problème ⁽¹⁾ que nous nous proposons de résoudre a pour objet de grouper les rayons réfractés de manière à former des surfaces développables.

Soient

M un point de la courbe donnée;

MT la tangente en ce point;

MN une normale;

MI le rayon incident qui est parallèle à une direction fixe;

MR le rayon réfracté dans le plan NMI.

On doit avoir

$$(1) \quad \sin NMI = n \sin NMR,$$

n étant l'indice de réfraction.

Je vais d'abord transformer cette relation.

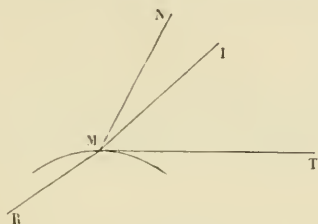
(1) C'est à M. Ossian Bonnet qu'on doit la première idée de généraliser ainsi le problème des développées; mais l'éminent géomètre s'est contenté de signaler ce fait que le problème se résolvait par des quadratures, et n'a pas publié ses travaux sur ce sujet.

Appelons ω l'angle dièdre du plan NMI et du plan TMI; le trièdre MTIN donne la relation

$$\cos NMT = 0 = \cos NMI \cos TMI + \sin NMI \sin TMI \cos \omega.$$

De même le trièdre MRIT donne

$$\cos RMT = \cos RMI \cos TMI + \sin RMI \sin TMI \cos \omega;$$



d'où, en éliminant $\cos \omega$ entre les deux équations précédentes,

$$\begin{aligned} \cos RMT \sin NMI &= \cos TMI (\cos RMI \sin NMI - \cos NMI \sin RMI) \\ &= -\cos TMI \sin RMN \end{aligned}$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \quad \cos RMT = -\frac{1}{n} \cos TMI.$$

L'angle RMT ne dépend donc pas de la normale MN; il ne dépend que de l'arc de courbe s et des cosinus directeurs de la direction fixe. Nous poserons d'une manière générale

$$(3) \quad \cos RMT = \lambda,$$

λ étant une fonction donnée de s . Il suffira, pour revenir au problème proposé, de prendre

$$(4) \quad \lambda = -\frac{1}{n} \cos TMI.$$

Cela posé, appelons

a, b, c les cosinus des angles que fait la tangente MT avec trois axes de coordonnées rectangulaires;

a', b', c' les cosinus directeurs de la normale;

a'', b'', c'' ceux qui déterminent l'axe du plan osculateur;

x_0, y_0, z_0 , les coordonnées du point M.

L'équation du plan osculateur de la courbe en M sera

$$a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0) = 0,$$

celle du plan mené par MT perpendiculairement au plan osculateur

$$a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0) = 0;$$

par conséquent, l'équation d'un plan qui fait avec le plan osculateur l'angle φ sera

$$a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0) \\ - \tan \varphi [a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + c'(z - z_0)] = 0.$$

Nous poserons

$$(5) \quad \tan \varphi = l.$$

Si l est fonction de s , le plan dont nous venons d'écrire l'équation enveloppera une surface, et cette surface sera une des développables que nous étudions si la caractéristique du plan fait avec la tangente MT un angle θ satisfaisant à l'équation (3), c'est-à-dire tel que

$$(6) \quad \cos \theta = \lambda.$$

Les équations d'une parallèle à cette caractéristique seront

$$(a'' - a'l)x + (b'' - b'l)y + (c'' - c'l)z = 0, \\ \frac{\partial(a'' - a'l)}{\partial s}x + \frac{\partial(b'' - b'l)}{\partial s}y + \frac{\partial(c'' - c'l)}{\partial s}z = 0.$$

Nous les écrirons

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

en posant

$$\alpha = (b'' - b'l) \frac{\partial(c'' - c'l)}{\partial s} - (c'' - c'l) \frac{\partial(b'' - b'l)}{\partial s}, \\ \beta = (c'' - c'l) \frac{\partial(a'' - a'l)}{\partial s} - (a'' - a'l) \frac{\partial(c'' - c'l)}{\partial s}, \\ \gamma = (a'' - a'l) \frac{\partial(b'' - b'l)}{\partial s} - (b'' - b'l) \frac{\partial(a'' - a'l)}{\partial s}.$$

Pour calculer α , nous emploierons les formules de M. Serret

$$\frac{\partial c'}{\partial s} = -\frac{c}{R} - \frac{c''}{T},$$

$$\frac{\partial c''}{\partial s} = \frac{c'}{T},$$

R étant le rayon de courbure, T le rayon de torsion de la courbe au point M.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \alpha = (b'' - b'l) \left(\frac{c'}{T} + l \frac{c}{R} + l \frac{c''}{T} - c' \frac{\partial l}{\partial s} \right) \\ - (c'' - c'l) \left(\frac{b'}{T} + l \frac{b}{R} + l \frac{b''}{T} - b' \frac{\partial l}{\partial s} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{b''c' - b'c''}{T} + \frac{b''c - bc''}{R} l - (b''c' - b'c'') \frac{\partial l}{\partial s} \\ - \frac{b'c - bc'}{R} l^2 - \frac{b'c'' - b''c'}{T} l^2, \end{aligned}$$

ou, en vertu de relations bien connues entre les neuf cosinus,

$$\alpha = -a \frac{1+l^2}{T} + a' \frac{l}{R} + a \frac{\partial l}{\partial s} + a'' \frac{l^2}{R};$$

on aura de même

$$\beta = -b \frac{1+l^2}{T} + b' \frac{l}{R} + b \frac{\partial l}{\partial s} + b'' \frac{l^2}{R},$$

$$\gamma = -c \frac{1+l^2}{T} + c' \frac{l}{R} + c \frac{\partial l}{\partial s} + c'' \frac{l^2}{R};$$

or l'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{ax + b\beta + c\gamma}{\sqrt{x^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \lambda,$$

ou

$$(ax + b\beta + c\gamma)^2 = \lambda^2(x^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Les formules précédentes donnent immédiatement

$$ax + b\beta + c\gamma = \frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T},$$

$$x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T} \right)^2 - \frac{l^2(1+l^2)}{R^2}.$$

L'équation du problème est donc enfin

$$\left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T}\right)^2 = \lambda^2 \left[\frac{l^2(1+l^2)}{R^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T}\right)^2 \right]$$

ou

$$(7) \quad \frac{\partial l}{\partial s} - \frac{1+l^2}{T} = \frac{\mu}{R} l \sqrt{1+l^2},$$

en posant

$$(8) \quad \mu = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Remarquons pour les applications ultérieures que l'on a

$$(8 \text{ bis}) \quad \mu = \cot \widehat{\text{RMT}}.$$

Faisons dans l'équation (7)

$$(9) \quad l = \frac{2t}{1+t^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial s} &= \frac{2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \frac{\partial t}{\partial s}, \\ 1+t^2 &= \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}. \end{aligned}$$

Il vient, après une suppression du facteur $\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$ dont il sera tenu compte ultérieurement,

$$(10) \quad \frac{\partial t}{\partial s} - \frac{1+t^2}{2T} - \frac{\mu}{R} t = 0.$$

Nous sommes ainsi ramenés à résoudre une équation de Riccati.

Jusqu'ici les axes de coordonnées et la fonction λ ou, ce qui revient au même, la fonction μ sont restés arbitraires. Revenant au problème primitif, nous prendrons, comme dans l'équation (4),

$$\lambda = -\frac{1}{n} \cos \widehat{\text{TMT}}.$$

De plus, l'axe des z sera parallèle aux rayons incidents, de sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{c}{n}, \\ \mu &= -\frac{c}{\sqrt{n^2 - c^2}}. \end{aligned}$$

Cela posé, on vérifie aisément que l'équation (10) admet les deux solutions suivantes :

$$t_1 = - \frac{c' + \sqrt{n^2 - c^2}}{c'' + \sqrt{1 - n^2}},$$

$$t_2 = - \frac{c' + \sqrt{n^2 - c^2}}{c'' - \sqrt{1 - n^2}}.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial t_1}{\partial s} = - \frac{\left(\frac{\partial c'}{\partial s} - \frac{c \frac{\partial c}{\partial s}}{\sqrt{n^2 - c^2}} \right) (c'' + \sqrt{1 - n^2}) - \frac{\partial c''}{\partial s} (\sqrt{n^2 - c^2} + c')}{(c'' + \sqrt{1 - n^2})^2};$$

or les formules de M. Serret donnent

$$\frac{\partial c}{\partial s} = \frac{c'}{R},$$

$$\frac{\partial c'}{\partial s} = \frac{c}{R} - \frac{c''}{T},$$

$$\frac{\partial c''}{\partial s} = \frac{c'}{T};$$

donc

$$\frac{\partial t_1}{\partial s} = \frac{\left(\frac{c}{R} + \frac{c''}{T} + \frac{cc'}{R\sqrt{n^2 - c^2}} \right) (c'' + \sqrt{1 - n^2}) + \frac{c'}{T} (\sqrt{n^2 - c^2} + c')}{(c'' + \sqrt{1 - n^2})^2}.$$

En portant dans l'équation (10) cette valeur ainsi que celles de μ et de t_1 , puis chassant le dénominateur $(c'' + \sqrt{1 - n^2})^2$, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{cc''}{R} + \frac{c'^2}{T} + \frac{cc'c''}{R\sqrt{n^2 - c^2}} + \frac{c\sqrt{1 - n^2}}{R} + \frac{c''\sqrt{1 - n^2}}{T} + \frac{cc'\sqrt{1 - n^2}}{R\sqrt{n^2 - c^2}} + \frac{c'\sqrt{n^2 - c^2}}{T} + \frac{c'}{T} \\ & - \frac{c''^2}{2T} - \frac{c''\sqrt{1 - n^2}}{T} - \frac{1 - n^2}{2T} - \frac{c'^2}{2T} - \frac{c'\sqrt{n^2 - c^2}}{2T} - \frac{n^2 - c^2}{2T} \\ & + \frac{c}{R\sqrt{n^2 - c^2}} (-c'c'' - c''\sqrt{n^2 - c^2} - c'\sqrt{1 - n^2} - \sqrt{1 - n^2}\sqrt{n^2 - c^2}), \end{aligned}$$

et l'on voit que tous les termes se détruisent deux à deux. De même, en changeant $\sqrt{1 - n^2}$ en $-\sqrt{1 - n^2}$, on voit que t_2 est solution de l'équation (10).

Cela posé, effectuons dans l'équation (10) la substitution

$$\frac{t - t_1}{t - t_2} = u,$$

d'où

$$t = t_1 + \frac{u(t_1 - t_2)}{1 - u};$$

or

$$t_1 - t_2 = \frac{2(c' + \sqrt{n^2 - c^2})\sqrt{1 - u^2}}{c'^2 + n^2 - 1} = \frac{2\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}}.$$

Donc

$$t = t_1 + \frac{2u}{1 - u} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt_1}{ds} + \frac{2\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}} \frac{d}{ds} \frac{u}{1 - u} - \frac{2u\sqrt{1 - u^2}}{1 - u} \frac{d(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})}{ds (\sqrt{n^2 - c^2 - c'})^2}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (16), en tenant compte de ce que t_1 est une solution : il vient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{2\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}} \times \frac{d}{ds} \frac{u}{1 - u} - \frac{2u\sqrt{1 - u^2}}{1 - u} \frac{d(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})}{ds (\sqrt{n^2 - c^2 - c'})^2} \\ & - \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{1 - u} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}} + \frac{1}{(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})^2 (1 - u)^2} \right] \\ & - \frac{\mu}{R} \frac{2u}{1 - u} \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{n^2 - c^2 - c'}} = 0. \end{aligned} \right.$$

Donnons à toutes les fractions le dénominateur $(1 - u)^2$ et écrivons seulement le coefficient de u^2

$$\frac{2\sqrt{1 - u^2}}{1} \frac{d(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})}{ds} + \frac{2t_1\sqrt{1 - u^2}(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})}{T} - \frac{2\sqrt{1 - u^2}}{T} - \frac{2\mu\sqrt{1 - u^2}(\sqrt{n^2 - c^2 - c'})}{R}.$$

Si l'on remplace dans l'expression précédente t_1 et μ par leurs valeurs, $\frac{dc}{ds}$ par $\frac{c'}{R}$ et $\frac{dc'}{ds}$ par $-\frac{c}{R} = \frac{c''}{T}$, on voit qu'elle est identiquement nulle.

L'équation (11) peut donc s'écrire, en supprimant le fac-

$$\text{teur } \frac{2\sqrt{1-n^2}}{(\sqrt{n^2-c^2-c'})(1-u)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{t_1 - t_2}{2T} u = 0.$$

On tire de là

$$u = Ce^{\int \frac{t_1 - t_2}{2T} ds},$$

C étant une constante arbitraire.

Nous avons donc enfin

$$(12) \quad \frac{t - t_1}{t - t_2} = Ce^{\int \frac{t_1 - t_2}{2T} ds}.$$

L'équation précédente ne contient plus qu'une seule quadrature à effectuer.

Le calcul que nous venons de faire repose sur ce que l'on connaît deux solutions de l'équation de Riccati : il est donc en défaut lorsque $t_1 = t_2$, c'est-à-dire lorsque

$$n = 1.$$

Dans ce cas, on ne connaît que la solution

$$t_1 = \frac{c' - \sqrt{1-c^2}}{c''}.$$

Je vais montrer que la résolution de l'équation de Riccati peut encore, dans ce cas, se ramener à une quadrature unique.

Faisons dans l'équation (10)

$$t = t_1 + \frac{1}{u}.$$

Elle devient

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{t_1}{T} + \frac{u}{R} \right) u - \frac{1}{2T} = 0;$$

d'où l'on tire

$$u = e^{-\int \left(\frac{u}{R} + \frac{t_1}{T} \right) ds} \left[C - \frac{1}{2} \int e^{\int \left(\frac{u}{R} + \frac{t_1}{T} \right) ds} \times \frac{ds}{T} \right].$$

La quadrature $\int \left(\frac{u}{R} + \frac{t_1}{T} \right) ds$ peut être effectuée. En effet, remplaçons u par $-\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$ et t_1 par $-\frac{c' - \sqrt{1-c^2}}{c''} = -\frac{c''}{\sqrt{1-c^2-c'}}$.

l'intégrale devient

$$\int \left(\frac{-c \, ds}{R \sqrt{1-c^2}} - \frac{\frac{c'' \, ds}{T}}{\sqrt{1-c^2-c'}} \right);$$

or les formules de M. Serret donnent

$$\frac{c'' \, ds}{T} = - \frac{c \, ds}{R} - dc'.$$

L'intégrale prend donc la forme

$$\begin{aligned} & \int \left[\frac{-c \, ds}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-c^2-c'}} \right) + \frac{dc'}{\sqrt{1-c^2-c'}} \right] \\ &= \int \left(\frac{cc' \, ds}{R \sqrt{1-c^2}} + dc' \right) \frac{1}{\sqrt{1-c^2-c'}} = \int \frac{\frac{c \, dc}{\sqrt{1-c^2}} + dc'}{\sqrt{1-c^2-c'}}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$- \log (\sqrt{1-c^2-c'});$$

on a donc

$$u = (\sqrt{1-c^2-c'}) \left(C - \frac{1}{2} \int \frac{ds}{T} \frac{1}{\sqrt{1-c^2-c'}} \right).$$

Il ne reste plus, comme nous l'avons annoncé, qu'une quadrature à effectuer.

Le cas des courbes planes mérite une mention spéciale, parce que les variables se séparent immédiatement dans l'équation (10).

Si, en effet, on fait dans cette équation $\frac{1}{T} = 0$, elle devient

$$\frac{dt}{ds} - \frac{v}{h} t = 0,$$

d'où

$$(13) \quad t = C, e^{\int \frac{v}{h} ds}.$$

Si l'on pose $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, φ sera l'angle du plan de la courbe et du plan tangent à la développable.

Pour deux solutions différentes correspondant aux valeurs c'

et c'' de la constante, nous aurons

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{z'}{\alpha}}{\operatorname{tang} \frac{z''}{\alpha}} = \frac{c'}{c''},$$

d'où cet énoncé :

Étant données deux surfaces développables répondant à la question et leurs plans tangents en un même point M de la courbe réfringente, les tangentes trigonométriques des moitiés des angles que font ces plans tangents avec le plan de la courbe ont un rapport constant lorsque le point M parcourt la courbe réfringente.

Exemple. — Supposons que la courbe donnée soit une circonférence de rayon R. En prenant pour axes deux diamètres rectangulaires de la circonférence et pour axe des z l'axe du cercle, nous aurons

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega, & dx &= -R \sin \omega d\omega, \\ y &= R \sin \omega, & dy &= R \cos \omega d\omega, \\ ds &= R d\omega. \end{aligned}$$

Il faut encore pour appliquer la formule (13), calculer c , c'est-à-dire le cosinus de l'angle que fait la tangente au cercle avec la direction des rayons incidents. Supposons que le plan des zx soit parallèle aux rayons incidents et que ceux-ci fassent avec l'axe Ox l'angle α , nous aurons

$$\begin{aligned} c &= \cos \alpha \frac{dx}{ds} = -\cos \alpha \sin \omega, \\ \mu &= -\frac{c}{\sqrt{n^2 - c^2}} = \frac{\cos \alpha \sin \omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \omega}} \\ &= \frac{\cos \alpha \sin \omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \omega}}, \\ \int \frac{\mu ds}{R} &= \int \frac{\cos \alpha \sin \omega d\omega}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \omega}} \\ &= -\log (\cos \alpha \cos \omega + \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \omega}). \end{aligned}$$

Portant cette valeur dans l'équation (13), nous obtenons

$$t = \operatorname{tang} \frac{z}{\alpha} = \frac{c}{\cos \alpha \cos \omega + \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cos^2 \omega}}.$$

Cette formule permettra d'étudier la variation de l'angle φ le long de la circonférence.

Remarque I. — Il nous reste à indiquer comment ont été obtenues les deux solutions particulières de l'équation (10). C'est M. Darboux qui m'a suggéré l'idée de cette intéressante application du théorème de Malus. On sait que les rayons réfractés seront normaux à une surface; les développables que nous venons d'étudier couperont donc cette surface suivant ses lignes de courbure. Nous allons déterminer deux lignes de courbure particulières; ce seront les sections de la surface par un plan P perpendiculaire aux rayons incidents.

Soient

IM un rayon incident;

I sa trace sur le plan P;

M le point où il rencontre la courbe réfringente;

MR un rayon réfracté.

Nous appellerons R le point où ce rayon perce la surface normale que nous étudions : Malus a démontré qu'on peut obtenir cette surface en prenant MR de telle sorte que

$$MI = n \cdot MR.$$

Cela posé pour tous les points R communs à la surface et au plan P, on aura la relation précédente, c'est-à-dire que la normale à la surface fait avec la normale au plan un angle constant : donc, d'après le théorème de Lancret, la section de la surface par le plan est une ligne de courbure. En prenant, au lieu de l'angle constant considéré ci-dessus, son supplément, on aura une deuxième ligne de courbure.

Remarque II. — Dans le cas où $n=1$, les deux lignes de courbure considérées ci-dessus se confondent. La développable particulière qui nous a permis dans ce cas de réduire l'équation (10) est le cylindre qui a pour directrice la courbe donnée et pour génératrices des parallèles à la direction des rayons incidents.

Remarque III. — Tous les rayons réfractés au même point M

de la courbe réfringente détermineront sur la surface normale une ligne de courbure circulaire, puisqu'il faudra porter sur chacun la même longueur $MR = \frac{1}{n} MI$. La surface normale aura donc un système de lignes de courbure circulaires. Cela posé, on sait que le rapport anharmonique de quatre solutions d'une équation de Riccati est constant : on aura donc, entre quatre solutions de l'équation (10), la relation

$$\frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} : \frac{t_4 - t_1}{t_4 - t_2} = \text{const.}$$

ou, en se rappelant la signification géométrique de la lettre $t = \tan \frac{\varphi}{2}$,

$$\frac{\sin \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_4 - \varphi_2}{2}} = \text{const.}$$

Or les quatre plans tangents aux développables qui correspondent aux angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ passent par la tangente MT, c'est-à-dire par l'axe de la ligne de courbure circulaire : l'équation précédente exprime donc un théorème de Géométrie déjà connu, mais dont nous ne connaissons pas de démonstration aussi simple que la précédente, à savoir que : *Sur toute surface enveloppe de sphères, quatre lignes de courbure non circulaires prises à volonté déterminent sur les lignes de courbure circulaires quatre points dont le rapport anharmonique est constant.* La méthode que nous avons employée est d'ailleurs indépendante du problème particulier que nous avons en vue, puisque l'équation de Riccati a été obtenue en laissant la fonction λ entièrement arbitraire.

*Généralisation du problème — Autres cas d'intégration
de l'équation (10).*

Nous reprendrons l'équation (7) et l'équation (10)

$$(7) \quad \frac{dt}{ds} - \frac{1-t^2}{T} = \frac{\mu}{R} t \sqrt{1-t^2},$$

$$(10) \quad \frac{dt}{ds} - \frac{t^2}{2T} - \frac{\mu}{R} t - \frac{1}{2T} = 0,$$

et nous chercherons s'il existe d'autres cas d'intégration. Mais remarquons d'abord que dans le passage de la première de ces équations à la deuxième nous avons supprimé un facteur $\frac{t^2+1}{t^2-1}$. $t = \sqrt{-1}$ ou, ce qui revient au même, $t = \sqrt{-1}$ est une solution singulière de l'équation (7). Ainsi, quelle que soit la loi suivant laquelle on fasse succéder des droites issues d'une courbe gauche donnée, on formera une surface développable en prenant celles qui sont dans les plans tangents au cercle imaginaire de l'infini, et alors toutes ces droites issues d'un même point de la courbe coïncideront entre elles et en particulier avec la normale à la courbe située dans le plan tangent considéré.

On voit ensuite que $t = 1$ ou $t = \infty$ n'est solution qu'autant que $\mu = -\frac{R}{T}$; mais alors $t = 1$ est aussi solution de l'équation (10) et la suppression du facteur $\frac{t^2+1}{t^2-1}$ n'a supprimé aucune solution.

L'équation (10) nous donnera immédiatement l'enveloppe des plans menés par la tangente qui font un angle constant φ avec le plan osculateur de la courbe. Dans ce cas, on a

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 0, \quad t = \tan \frac{\varphi}{2},$$

d'où

$$\mu = -\frac{R}{T} \frac{t^2+1}{2t} = -\frac{R}{T \sin \varphi}$$

et, à cause de l'équation (8 bis),

$$(14) \quad \widehat{\text{RMT}} = -\sin \varphi \frac{\frac{R}{T}}{\frac{1}{T}}.$$

On a donc ce théorème :

Si l'on trace sur une surface développable une courbe dont les plans osculateurs fassent avec les plans tangents de la surface un angle constant, les tangentes à la courbe font avec les génératrices de la surface des angles dont la tangente trigonométrique a pour valeur le rapport de la courbure de la courbe à sa torsion multiplié par le sinus de l'angle constant.

Mais la réciproque de ce théorème n'est pas vraie. On voit seu-

lement que l'équation (10) pourra encore être intégrée par une seule quadrature dans le cas où la loi de succession des rayons issus de la courbe sera celle indiquée (14). Supposons, en effet,

$$\mu = - \frac{R}{T \sin \varphi},$$

φ étant une constante.

L'équation (10) devient

$$\frac{\partial t}{\partial s} - \frac{t^2}{2T} + \frac{t}{T \sin \varphi} - \frac{1}{2T} = 0$$

ou

$$\frac{\partial t}{t^2 - \frac{2t}{\sin \varphi} + 1} = \frac{ds}{T}$$

ou

$$\frac{dt}{\left(t - \cot \frac{\varphi}{2}\right) \left(t - \operatorname{ng} \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{ds}{2T},$$

d'où

$$\frac{t - \cot \frac{\varphi}{2}}{t - \operatorname{ng} \frac{\varphi}{2}} = C e^{\cot \varphi \int \frac{ds}{T}}.$$

Cette équation ne donnera $t = \text{const.}$ que si la constante C est nulle ou infinie.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 16 MARS 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Élection : M. Simart, lieutenant de vaisseau, examinateur d'admission à l'École navale, présenté à la dernière séance par MM. Picard et Piequet, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Weill : *Sur les polygones dont les sommets sont sur une courbe donnée.*

M. Laguerre : *Sur la démonstration du théorème de d'Alembert par M. Valecki.*

M. Zeller envoie une Note manuscrite intitulée : *Problema duplex Calendarii fundamentale.*

M. David envoie une Note manuscrite intitulée : *Sur deux séries nouvelles donnant le sinus et le cosinus d'un arc.*

Le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, les *Acta Mathematica*, et l'*Académie des Sciences de Munich* acceptent l'échange de leurs publications contre le *Bulletin de la Société*.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communications :

M. Schwarz : *Sur l'intégrale de l'équation*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

M. Dyck : *Sur la composition d'un groupe de substitutions.*

M. Halphen : *Sur un Mémoire de Riemann relatif à la totalité des nombres premiers.*

SÉANCE DU 20 AVRIL 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Election : M. Fleureau, élève-ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté à la dernière séance par MM. Lucas et Picquet, est élu membre de la Société.

Communication :

M. Halphen fait un exposé de son Mémoire *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*.

M. N. Vaněček adresse une Note manuscrite *Sur une surface du huitième degré*.

M. David envoie une Note manuscrite intitulée : *Sur les relations algébriques des fonctions Θ* .

SÉANCE DU 4 MAI 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communications :

M. Halphen : *Sur le criterium de Steiner relatif aux coniques ayant pour centre un point donné et passant par trois points donnés*.

M. Fouret : *Sur l'involution du $m^{\text{ième}}$ ordre*.

M. Perrin : *Sur les résidus des invariants et covariants des formes binaires*.

SÉANCE DU 18 MAI 1883.

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN.

Election : M. Ouang-King-Touan, mandarin, élève externe de l'École des Ponts et Chaussées, présenté dans la dernière séance par MM. Rouché et d'Ocagne, est élu membre de la Société.

Communications :

M. Poincaré : *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*.

M. Lebon : *Sur l'appareil de la vis Saint-Gilles.*

M. Stephanos : *Sur les relations qui existent entre les invariants et les covariants de la forme binaire du sixième ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur la transformation par semi-droites réciproques.*

SÉANCE DU 1^{er} JUIN 1883.

PRÉSIDENCE DE M. PERRIN.

Communications :

M. Poincaré : *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions.*

M. Stephanos : *Sur une représentation géométrique des quaternions.*

SÉANCE DU 13 JUIN 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Élections : M. Pelletreau, ingénieur des Ponts et Chaussées, présenté dans la dernière séance par MM. Brocard et Picquet; et M. Sylow, professeur à Frederikshald (Norwège), présenté dans la même séance par MM. Weill et Picquet, sont élus membres de la Société.

Communications :

M. Stephanos : *Sur les combinants des formes binaires.*

M. Jordan : *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires par les intégrales définies.*

SÉANCE DU 6 JUILLET 1883.

PRÉSIDENCE DE M. STEPHANOS.

Communications :

M. Bobek : *Sur les lignes de striction de l'hyperboloïde à une nappe.*

M. Weill : *Sur les points doubles des courbes unicursales.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1883.

PRÉSIDENCE DE M. ROUCHÉ.

Communication :

M. Stephanos : *Sur les courbes planes rationnelles du quatrième degré.*

M. Stephanos est délégué pour représenter la Société au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences à Rouen.

M. Goursat adresse un Mémoire manuscrit intitulé : *Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré.*

M. Poincaré adresse deux Notes manuscrites *Sur les fonctions Θ* , et *Sur les fonctions entières.*

M. d'Ocagne adresse une Note manuscrite : *Sur le centre de courbure des courbes de poursuite.*

M. Sylow annonce qu'il s'est fait inscrire comme sociétaire perpétuel.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE (1).

OUVRAGES ET MÉMOIRES REÇUS DU 16 MARS AU 20 JUILLET 1883.

Schwarz : *Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires.*

— *Bestimmung der scheinbaren Grösse eines Ellipsoids für einen beliebigen Punkt des Raumes.*

— *Zur conformen Abbildung der Fläche eines Rechtecks auf die Fläche einer Halbkugel.*

— *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

(1) Ce Bulletin ne comprend pas les périodiques que la Société reçoit en échange de ses publications (voir p. 11).

- *Ueber einen Grenzübergang durch alternirendes Verfahren.*
- *Ueber einige nicht algebraische Minimalflächen, welche eine Schaar algebraischer Curven enthalten.*
- *Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen.*
- *Vervollständigung der Steinerschen elementargeometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges.*

Neovius : *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen.*

Max. Voretzsch : *Untersuchung einer speciellen Fläche constanten mittlerer Krümmung bei welcher die eine der beiden Schaaren der Krümmungslinien von ebenen Curven gebildet wird.*

Carl Schilling : *Die Minimalflächen fünfter Klasse mit dem Stereoscop-Bild eines Modells derselben.*

Thomas Craig : *Treatise on projections.*

Udalrico Masoni : *Sur quelques courbes du quatrième ordre douées de points d'ondulation.*

Halphen : *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.* (Savants étrangers, 1883.)

Catalan : *Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce.* (Mémoires de l'Académie royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts de Belgique, t. XLV, 1883.)

Walter Dyck : *Ueber die Zusammensetzung einer Gruppe discreter Operationen, über ihre Primitivität und Transitivität.* (Extrait des Math. Annalen.)

Kronecker : *Die Composition Abelscher Gleichungen.*

— *Die kubischen Abelschen Gleichungen des Bereichs.* (Extraits des *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin.)

— *Zur Theorie der elliptischen Functionen.* (Extrait des *Monatsberichte* de l'Académie des Sciences de Berlin.)

— *Sur les unités complexes.* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*)

— *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.*

Gal^{al} Parmentier : *Sur de nouvelles formules de quadrature.* (Extrait des *Comptes rendus* du Congrès de la Rochelle.)

E. Weyr : *Ueber mehrstufige Curven und Flächensysteme.*

— *Sur les surfaces d'involution.*

— *Ueber einen Correspondenzsatz.*

— *Sur les involutions supérieures.*

Carvallo : *Théorie des nombres parfaits.*

Garrigou-Lagrange : *Observations sur le mouvement et le choc des systèmes invariables.*

E. Cesaro : *Sur diverses questions d'Arithmétique.* (Bruxelles, Hayez; 1883.)

Catalan : *Recherches sur la constante G et les intégrales eulériennes.* (Extrait des *Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Petersbourg*, 7^e série, t. XXXI.)

E. Weyr : *Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.* (Extrait des *Monatsberichte* de l'Académie de Vienne.)

Schlegel : *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde.* (Extrait des *Nova Acta der K. deutschen Ak. der Naturforscher*, à Halle.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XI.

	Pages.
État de la Société mathématique de France au 1 ^{er} janvier 1883.....	5
Quelques questions de probabilité résolues géométriquement; par M. É. LEMOINE.....	13
Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes, et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre; par M. É. PICARD....	25
Sur une propriété relative à deux systèmes matériels, composés d'un même nombre de points ayant des masses égales chacune à chacune; par M. FOURET.....	53
Problema duplex calendarii fundamentale; par M. ZELLER.....	59
Sur le cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré; par M. PERRIN.....	61
Sur certains développements en série de puissances; par M. APPELL.....	65
Démonstration du théorème de Clausen et de Staudt sur les nombres de Bernoulli; par M. Éd. Lucas.....	69
Sur deux séries nouvelles qui expriment le sinus et le cosinus d'un arc donné; par M. DAVID.....	72
Sur les ellipses décrites par les points invariablement liés à un segment constant; par M. N. VANĚK.....	76
Note sur les résidus des invariants et covariants des formes binaires; par M. PERRIN.....	88
Extraits des procès-verbaux (séances du 3 novembre 1882 au 2 mars 1883).	107
Bulletin bibliographique.....	111
Sur un théorème de la théorie générale des fonctions; par M. POINCARÉ.....	112
Remarque sur la ligne de striction de l'hyperboloïde à une nappe; par M. BOBEK.....	125
Sur les fonctions Θ ; par M. POINCARÉ.....	129
Sur le centre de courbure des courbes de poursuite; par M. d'OCAGNE.....	134
Sur les fonctions entières; par M. POINCARÉ.....	136
Sur les équations différentielles du quatrième ordre, dont les intégrales vérifient une relation homogène du second degré; par M. GOURSAT.....	141
Sur le problème des fous; par M. PEROTT.....	173
Sur les surfaces développables formées par la réfraction d'un faisceau de rayons lumineux parallèles sur une courbe donnée; par M. LUCIEN LEVY....	186
Extraits des procès-verbaux (séances du 16 mars au 20 juillet 1883).....	200
Bulletin bibliographique.....	203

FIN DE LA TABLE DU TOME XI.

QA Société mathématique de
l France, Paris
S59 Bulletin
t.10-11

Math.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
